



# Champs algébriques et foncteur de Picard

Sylvain Brochard

## ► To cite this version:

Sylvain Brochard. Champs algébriques et foncteur de Picard. Mathématiques [math]. Université Rennes 1, 2007. Français. NNT: . tel-00492445

**HAL Id: tel-00492445**

**<https://theses.hal.science/tel-00492445>**

Submitted on 24 Jun 2010

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'Ordre : 3537

# THÈSE

*présentée*

DEVANT L'UNIVERSITÉ DE RENNES 1

*pour obtenir le grade de*

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Mention Mathématiques et Applications

*par*

**Sylvain BROCHARD**

Institut de Recherche Mathématique de Rennes

École Doctorale MATISSE

U.F.R. de Mathématiques

TITRE DE LA THÈSE :

**Champs algébriques et foncteur de Picard**

Soutenue le 8 juin 2007 devant la Commission d'Examen

COMPOSITION DU JURY :

M. A. CHAMBERT-LOIR	Examineur
M. Y. LASZLO	Rapporteur
M. G. LAUMON	Examineur
M. L. MORET-BAILLY	Directeur de thèse
M. M. RAYNAUD	Examineur



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>5</b>
<b>1 Foncteurs de Picard</b>	<b>13</b>
1.1 Groupe de Picard d'un champ . . . . .	13
1.1.1 Différents visages des faisceaux inversibles . . . . .	13
1.1.2 Description du groupe de Picard . . . . .	16
1.2 Les foncteurs de Picard relatifs . . . . .	18
1.2.1 Définitions et premières propriétés . . . . .	18
1.2.2 Morphismes cohomologiquement plats en dimension zéro . . . . .	19
1.2.3 Le théorème de comparaison . . . . .	22
1.3 Le champ de Picard d'un champ algébrique . . . . .	24
1.4 Propriétés de finitude relative . . . . .	27
1.4.1 Présentation finie . . . . .	28
1.4.2 Commutation aux limites projectives . . . . .	29
<b>2 Propriétés de séparation</b>	<b>31</b>
2.1 Préliminaires . . . . .	31
2.1.1 Critère valuatif de locale séparation d'Artin . . . . .	31
2.1.2 Sections globales et trivialité des faisceaux inversibles . . . . .	37
2.1.3 Un peu de descente fidèlement plate . . . . .	39
2.2 Locale séparation du foncteur de Picard . . . . .	39
2.3 Quasi-séparation du champ de Picard . . . . .	40
<b>3 Théorie des déformations</b>	<b>44</b>
3.1 Conditions de Schlessinger . . . . .	44
3.2 Déformations de faisceaux inversibles . . . . .	48
3.3 Lissité et dimension . . . . .	56
3.4 Représentabilité . . . . .	58
<b>4 Composante neutre du foncteur de Picard</b>	<b>61</b>
4.1 Préliminaires . . . . .	61
4.1.1 Composante des fibres le long d'une section . . . . .	61
4.1.2 Cohomologie à coefficients dans $\mathbb{Z}$ des champs normaux . . . . .	64
4.2 La composante connexe de l'identité . . . . .	66

<b>5 Quelques exemples</b>	<b>70</b>
5.1 L'espace projectif . . . . .	70
5.2 Racine $n^{\text{ième}}$ d'un faisceau inversible . . . . .	71
5.3 Courbes tordues d'Abramovich et Vistoli . . . . .	78
5.3.1 Rappel des définitions et propriétés élémentaires . . . . .	78
5.3.2 Description du foncteur de Picard des courbes tordues lisses . . . .	79
<b>Annexes</b>	<b>81</b>
A.1 Cohomologie lisse-étale sur les champs algébriques . . . . .	82
A.1.1 Cohomologie des faisceaux . . . . .	82
A.1.2 Fonctorialité du topos lisse-étale . . . . .	85
A.1.3 Le site lisse-lisse champêtre d'un champ algébrique . . . . .	86
A.1.4 La suite spectrale relative à un recouvrement . . . . .	88
A.1.5 Faisceaux acycliques . . . . .	89
A.1.6 Images directes supérieures et suite spectrale de Leray relative à un morphisme de champs algébriques . . . . .	90
A.1.7 Cohomologie et changement de base . . . . .	93
A.1.8 Cohomologie et extensions infinitésimales . . . . .	95
A.1.9 Un résultat de descente . . . . .	97
A.1.10 Cohomologie et toiseurs . . . . .	101
A.2 Cohomologie fppf . . . . .	102
A.2.1 Sorites sur la cohomologie plate . . . . .	102
A.2.2 Comparaison avec la cohomologie lisse-étale . . . . .	104
<b>Bibliographie</b>	<b>107</b>

## Introduction

Si  $X$  est un objet géométrique, son groupe de Picard est le groupe des classes d'isomorphie de faisceaux inversibles (ou, si l'on préfère, de fibrés en droites) sur  $X$ . Par exemple si  $X$  est le spectre d'un anneau de Dedekind  $A$ , le groupe  $\text{Pic}(X)$  est simplement le groupe des classes d'idéaux de  $A$ . Si  $X$  est l'espace projectif  $\mathbb{P}^n$  sur un corps, il est connu que le degré des faisceaux inversibles induit un isomorphisme de  $\text{Pic}(X)$  vers  $\mathbb{Z}$ . Dans bien des cas, le groupe de Picard est naturellement muni d'une structure *géométrique*. Par exemple si  $X$  est un schéma projectif intègre sur un corps  $k$  algébriquement clos, on sait que le groupe de Picard  $\text{Pic}(X)$  apparaît en fait comme le groupe sous-jacent à un  $k$ -schéma en groupes  $\text{Pic}_{X/k}$  appelé le *schéma de Picard* (ou foncteur de Picard) de  $X$ .

L'objet de cette thèse est de définir et d'étudier le foncteur de Picard d'un *champ algébrique* – un objet géométrique, apparu vers 1970, qui généralise la notion de schéma. Pour comprendre la nécessité d'étudier un tel objet et pour apprécier à leur juste valeur les travaux de Grothendieck, il n'est sans doute pas inutile de revoir rapidement l'histoire du foncteur de Picard et des champs algébriques. Pour plus de détails sur les aspects historiques évoqués ci-dessous ou pour des références plus précises, nous renvoyons à l'excellente introduction de [34] dont nous nous sommes inspiré.

## Foncteur de Picard

Les besoins technologiques du 17<sup>ème</sup> siècle ont poussé les mathématiciens à développer le calcul intégral. Ils ont alors commencé à s'intéresser aux propriétés de certaines fonctions apparaissant comme des intégrales indéfinies. À la toute fin de ce siècle, Jacques Bernoulli puis son frère Jean mirent ainsi en évidence des relations algébriques surprenantes entre les arguments des sommes et des différences de logarithmes, de fonctions trigonométriques inverses, ou de certaines fonctions intégrales. Dans la même veine, le travail de Fagnano au début du 18<sup>ème</sup> siècle amena Euler à découvrir en 1757 la « formule d'addition » suivante

$$\int_0^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} \pm \int_0^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \int_0^{x_3} \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$$

où  $x_1, x_2$  et  $x_3$  vérifient la relation algébrique :

$$x_1^4 x_2^4 x_3^4 + 2x_1^2 x_2^2 x_3^2 (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 - 2x_1^2 x_2^2 - 2x_1^2 x_3^2 - 2x_2^2 x_3^2 = 0.$$

Il généralisa en 1759 cette formule à d'autres intégrales. Abel donna en 1826 une bien plus large portée à ces considérations en découvrant le fameux « théorème d'Abel ». C'est un théorème d'addition très général pour des intégrales algébriques de ce type, intégrales qui ont vite pris le nom d'« intégrales abéliennes ». Euler comme Abel remarquèrent que ces intégrales étaient en quelque sorte « multivaluées », un peu comme les fonctions trigonométriques inverses, mais ne poussèrent pas l'analogie plus loin. Abel voyait ce phénomène comme une sorte de « constante d'intégration » dont il évitait l'apparition en ne considérant que des chemins d'intégration assez petits.

Riemann éclaircit nettement la situation en 1857. En étudiant les intégrales sur une variété projective lisse complexe  $C$  de dimension 1, que l'on appellerait aujourd'hui une « surface de Riemann », il prouve que certaines de ces intégrales, les intégrales « de première espèce », forment un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie  $p$  et qu'elles ont  $2p$  « périodes », c'est-à-dire des nombres qui engendrent tous les changements possibles de la valeur de l'intégrale qui peuvent survenir en changeant le chemin d'intégration. Plus précisément, il fixe une base  $(\psi_1, \dots, \psi_p)$  de l'espace des intégrales de première espèce. Il

choisit aussi  $2p$  chemins qui forment une base de l'homologie, puis il forme le réseau  $\Lambda$  de  $\mathbb{C}^p$  engendré par les  $2p$  vecteurs obtenus en intégrant  $(\psi_1, \dots, \psi_p)$  le long des  $2p$  chemins choisis.

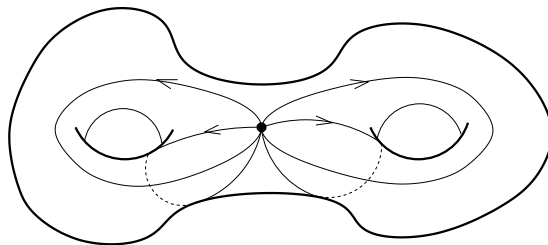


Figure 1 : Une surface de Riemann de genre 2 a quatre « périodes ».

Il appelle alors « jacobienne » le quotient

$$J = \mathbb{C}^p / \Lambda.$$

Il s'intéresse aussi au morphisme dit « d'Abel-Jacobi » de la  $\mu$ -ième puissance symétrique de  $C$  vers la jacobienne :

$$\Psi_\mu : \begin{cases} C^{(\mu)} & \longrightarrow J \\ (x_1, \dots, x_\mu) & \longmapsto \left( \sum_{i=1}^{\mu} \psi_1 x_i, \dots, \sum_{i=1}^{\mu} \psi_p x_i \right). \end{cases}$$

Il montre que si les diviseurs  $x_1 + \dots + x_\mu$  et  $x'_1 + \dots + x'_\mu$  sont linéairement équivalents, alors  $\psi_\mu(x_1, \dots, x_\mu)$  et  $\psi_\mu(x'_1, \dots, x'_\mu)$  sont égaux. La réciproque, vraie également, ne sera prouvée que quelques années plus tard par un autre mathématicien (Clebsch, 1864). Ainsi la jacobienne, dont on commence à voir qu'elle s'identifie au groupe des classes de diviseurs, acquiert avec Riemann une structure de tore complexe de dimension  $p$ . Elle n'est cependant pour l'instant définie que sur le corps  $\mathbb{C}$  des nombres complexes.

Dans les années 1950, Weil fonde la théorie des variétés abéliennes. Il donne en particulier une construction purement algébrique de la jacobienne et prouve ainsi son existence sur un corps quelconque. L'inconvénient de cette démarche est que la structure géométrique n'est pas définie *a priori* mais résulte de la construction algébrique. Il faut par exemple revenir à la construction pour voir que tel objet lié au groupe de Picard est bien un objet algébrique.

Il a fallu attendre Grothendieck pour voir apparaître une définition générale du « foncteur de Picard » d'un schéma sur une base quelconque, cette notion se comportant de plus extrêmement bien par changement de base. Il est défini de la manière suivante. Si  $X$  est un  $S$ -schéma, on définit d'abord le foncteur  $P$  de la catégorie des  $S$ -schémas vers celle des groupes qui à un  $S$ -schéma  $T$  associe  $P(T) = \text{Pic}(X \times_S T)$ . On se demande alors s'il existe un schéma qui représente ce foncteur, c'est-à-dire un  $S$ -schéma  $\underline{\text{Pic}}$  tel que pour tout  $T$ ,  $P(T)$  s'identifie à l'ensemble des morphismes de  $T$  vers  $\underline{\text{Pic}}$ . Naturellement, ainsi posé, le problème n'a pas de solution. On sait en effet qu'un foncteur représentable est toujours un faisceau pour la topologie *fqc*. Or le foncteur  $P$  que nous venons de définir n'est jamais un faisceau, même pour la topologie de Zariski : il existe toujours des faisceaux non triviaux qui proviennent de la base. Qu'importe ! Il suffit de considérer, non pas le foncteur  $P$  lui-même, mais le faisceau associé pour une topologie suffisamment fine pour que l'on puisse espérer que le faisceau obtenu ait une chance d'être représentable. En

pratique on se contente de la topologie étale. On appelle donc foncteur de Picard de  $X$ , et l'on note  $\text{Pic}_{X/S}$ , le faisceau associé à  $P$  pour la topologie étale. Le schéma de Picard, s'il existe, est alors simplement l'unique schéma qui représente ce foncteur. Avec cette définition, la structure géométrique est intimement liée à la structure algébrique et est en tout cas complètement définie *a priori*. Ce point de vue présente un avantage non négligeable : la construction du foncteur de Picard ne requiert aucune hypothèse sur le schéma  $X$ . En travaillant directement sur le foncteur de Picard, on peut même étudier certaines propriétés géométriques (lissité, séparation, propriété, dimension...) du schéma de Picard sans même savoir s'il existe!! Quant à l'existence du schéma de Picard (c'est-à-dire la représentabilité du foncteur de Picard par un schéma), elle est établie dans de nombreux cas à l'aide de techniques projectives reposant sur une utilisation judicieuse du schéma de Hilbert.

Les travaux ultérieurs s'inscrivent parfaitement dans le prolongement de la démarche « fonctorielle » initiée par Grothendieck. Artin invente et développe avec son élève Knutson (voir [35]) la notion d'espace algébrique, qui généralise celle de schéma. Il montre alors avec Raynaud l'existence d'un « espace algébrique de Picard ». Cette fois-ci, la démonstration ne fait aucun usage des techniques projectives encore indispensables quelques années auparavant. Il en résulte un théorème valable dans un cadre bien plus général que celui qui assure l'existence du schéma de Picard, et de surcroît plus facile à obtenir, sans que le produit obtenu (un espace algébrique au lieu d'un schéma) ne soit réellement moins commode.

## Champs algébriques

La thèse de Giraud, vers 1970, donne naissance aux champs, dans la droite lignée des travaux de Grothendieck. La notion de champ algébrique suit immédiatement avec un article fondateur de Deligne et Mumford ([20]) : ils démontrent, en introduisant les champs qui portent aujourd'hui leurs noms, que l'espace de module des courbes de genre  $g$  est irréductible. Artin donne peu après une définition un peu plus générale des champs algébriques.

Initialement introduits pour pallier la non-existence de certains espaces de modules ou bien pour effacer quelques importunes singularités d'iceux, qui n'apparaissent que par une sorte d'illusion d'optique due à la mise à mort des automorphismes des objets qu'ils sont censés classer, les champs algébriques ont petit à petit pris une place considérable dans l'environnement naturel du géomètre algébriste. Au point que certains pensent, comme Abramovich et Vistoli (cf. [6] 1.2), qu'ils sont amenés à devenir l'objet d'étude de base du géomètre algébriste, au même titre que les schémas l'étaient pour les « anciens ». De fait, des travaux récents les ont fait apparaître comme tels. Prenons l'exemple des surfaces elliptiques, c'est-à-dire des familles de courbes elliptiques paramétrées par une courbe  $C$ . Pour compactifier l'espace de modules de ces surfaces, il faut rajouter quelques points. Or ces points supplémentaires correspondent naturellement à des familles paramétrées par des « courbes tordues » introduites par Abramovich et Vistoli. Ce sont des courbes nodales munies d'une structure supplémentaire d'« orbispace » au-dessus de chaque nœud. Elles sont ainsi munies d'une structure de champ de Deligne-Mumford. Nous reparlerons de ces courbes ultérieurement.

## Des jacobiniennes de courbes champêtres ?

Toute la force des champs algébriques vient du fait que la plupart des notions géométriques classiques (lissité, dimension, cohomologie, connexité...) s'y étendent sans dif-



ficulté. Pour ce qui concerne le groupe de Picard, le travail a été initié par Mumford dans un article fondateur. Bien que la notion de champ n'ait pas encore été introduite, il y calcule en réalité le groupe de Picard du champ des courbes elliptiques, isomorphe à  $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ . Il semble cependant que personne ne se soit encore réellement attelé à la construction de la jacobienne d'un champ algébrique et à l'étude de ses propriétés géométriques. En l'état actuel des publications, la seule chose que l'on puisse affirmer est que la question de la représentabilité du foncteur de Picard est pour l'essentiel déjà résolue. Masao Aoki montre en effet dans des travaux récents (voir [11] et [10]) que si  $\mathcal{X}$  et  $\mathcal{Y}$  sont des  $S$ -champs algébriques de présentation finie, et si  $\mathcal{X}$  est propre et plat, alors le champ des morphismes  $\mathcal{H}om(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ , dont on trouvera une définition précise dans les articles cités, est un champ (pré)algébrique<sup>1</sup>. Or en prenant pour  $\mathcal{Y}$  le champ  $B\mathbb{G}_m$  qui classe les  $\mathbb{G}_m$ -torseurs, on obtient le champ  $\mathcal{H}om(\mathcal{X}, B\mathbb{G}_m)$ , isomorphe au champ des faisceaux inversibles  $\mathcal{P}ic(\mathcal{X}/S)$  dont la catégorie fibre au-dessus d'un  $S$ -schéma  $U$  est la catégorie des faisceaux inversibles sur  $\mathcal{X} \times_S U$ . On en déduit facilement que le foncteur de Picard d'un champ algébrique propre, plat et cohomologiquement plat en dimension zéro est représentable par un espace algébrique (cf. infra (1.3.7)). Max Lieblich vient par ailleurs de souligner (cf. [39]) le fait que le champ des faisceaux quasi-cohérents à support propre sur un champ algébrique (avec de bonnes hypothèses) est algébrique. Il en déduit ensuite que le champ des fibrés de rang fini, donc en particulier le champ  $\mathcal{P}ic(\mathcal{X}/S)$ , est algébrique.

Cependant la démonstration d'Aoki ne permet pas réellement de voir ce qui se passe pour le foncteur de Picard. D'une part il n'y est question que de morphismes de champs algébriques, si bien qu'il faut toujours traduire les énoncés et les démonstrations dans le langage des faisceaux inversibles. Mais surtout, l'étude générale des morphismes oblige l'auteur à recourir à des techniques dont on sent bien qu'elles sont par trop élaborées pour le simple cas des faisceaux inversibles. Max Lieblich utilise implicitement le même genre de techniques pour traiter le cas du champ des faisceaux quasi-cohérents à support propre.

## Plan de la thèse et principaux résultats

### Généralités

Le premier chapitre est consacré à la définition et aux premières propriétés *des* foncteurs de Picard d'un champ algébrique sur un schéma  $S$ . Après avoir revu rapidement ce qu'était un faisceau inversible, nous démontrons que le groupe des classes de faisceaux inversibles est isomorphe au groupe  $H^1(\mathcal{X}, \mathbb{G}_m)$ , retrouvant ainsi le résultat analogue bien connu dans le cas des schémas. Puis nous définissons comme dans le cas des schémas différents foncteurs de Picard, qui sont des faisceaux relativement à des topologies de plus en plus fines sur  $S$ , et nous en donnons une description cohomologique. Le théorème le plus utile est le théorème de comparaison (1.2.3.1) entre ces différents foncteurs dans le cas où  $f$  est cohomologiquement plat en dimension zéro et quasi-compact. Signalons tout de suite que pour mener à bien cette étude, nous avons besoin d'un certain nombre de résultats élémentaires relatifs à la cohomologie lisse-étale des champs algébriques, qui semblent manquer à la littérature actuelle. Nous avons préféré reléguer ces résultats en annexe afin de ne pas « polluer » le texte principal par trop de considérations techniques. Nous reviendrons plus en détail sur cette annexe et son contenu un peu plus loin.

Nous définissons ensuite le champ de Picard. Nous montrons en particulier que sous des hypothèses raisonnables, le champ de Picard est algébrique si et seulement si le foncteur

1. Seule la quasi-séparation n'est pas traitée par Aoki. Nous y reviendrons dans un paragraphe ultérieur.

de Picard est représentable.

Cette partie s'achève sur des propriétés élémentaires du foncteur de Picard. Il est tout d'abord localement de présentation finie dès que le morphisme structural de  $\mathcal{X}$  est quasi-compact. En outre il commute aux limites projectives. Cette dernière propriété, d'ailleurs facile à obtenir à l'aide du théorème d'existence de Grothendieck généralisé par Olsson aux champs algébriques, trouve sa raison d'être dans le théorème de représentabilité du foncteur de Picard (re)démontré ultérieurement.

### Propriétés de séparation

Cette seconde partie est déjà plus technique que la précédente. Nous y étudions les propriétés de séparation du foncteur de Picard et du champ de Picard. On retiendra principalement deux résultats, et peut-être un lemme qui peut s'avérer utile pour résoudre la question de la quasi-séparation pour d'autres champs que le champ de Picard.

Le premier de ces résultats est la proposition (2.2.2) : le foncteur de Picard est localement séparé, autrement dit sa diagonale est une immersion quasi-compacte, dès que  $\mathcal{X}$  vérifie les hypothèses habituelles. La démonstration repose essentiellement sur les idées d'Artin présentes dans [12] et qui apparaissent ici sous la forme du théorème (2.1.1.2).

Pour un champ, les questions de séparation semblent nettement plus délicates en général. Il est déjà hors de question qu'un « vrai » champ algébrique, j'entends par là un champ algébrique qui n'est pas un espace algébrique, soit localement séparé au sens habituel. En effet sa diagonale serait alors une immersion donc un monomorphisme, ce qui prouverait que le morphisme structural est représentable. La condition qu'il est raisonnable d'exiger serait donc celle de quasi-séparation : on dit qu'un champ algébrique est quasi-séparé si sa diagonale est quasi-compacte. Cette condition fait d'ailleurs partie de la définition d'un champ algébrique dans le livre [38] de Laumon et Moret-Bailly. D'une manière ou d'une autre il est nécessaire d'imposer des conditions de finitude sur la diagonale. On lira à ce sujet la remarque II 1.9 de Knutson dans [35]. Cependant un certain nombre de champs tout à fait dignes d'intérêt et que l'on aurait envie de qualifier d'« algébriques » ne sont pas quasi-séparés. Doit-on considérer que le champ classifiant  $B\mathbb{Z}$  est algébrique ? Pour d'autres champs la question n'est tout simplement pas résolue<sup>2</sup>. Par exemple dans [11], Masao Aoki ne traite qu'un cas très particulier : il montre que le champ des morphismes  $\mathcal{H}om(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$  est quasi-séparé lorsque  $\mathcal{X}$  est un espace algébrique et  $\mathcal{Y}$  admet une présentation propre ([11] proposition 4.1). Nous montrons dans cette partie (voir le théorème (2.3.1)) que dans le cas particulier du champ de Picard, le fait que les groupes d'automorphismes soient quasi-compacts suffit à assurer la quasi-séparation.

Nous donnons au passage un critère de quasi-séparation pour les champs algébriques fortement inspiré du théorème d'Artin (2.1.1.2).

### Déformation de faisceaux inversibles

Nous étudions dans cette troisième partie les déformations de faisceaux inversibles, puis nous (re)démontrons que le foncteur de Picard d'un champ algébrique propre, plat et cohomologiquement plat en dimension zéro est représentable et nous donnons enfin des propriétés élémentaires sur sa lissité et sa dimension.

L'étude des déformations est la pierre angulaire des théorèmes de représentabilité d'Artin que l'on peut trouver dans [12] ou [15]. C'est souvent le point dont l'étude est la plus délicate. C'est d'ailleurs pour cette raison que Masao Aoki a dû, pour montrer que le champ  $\mathcal{H}om(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$  était algébrique, consacrer un premier article ([9]) à l'étude des

---

2. Certains auteurs ont même enlevé la condition de quasi-séparation de la définition.

déformations de champs algébriques, et s'appuyer sur un article d'Olsson ([46]) concernant les déformations de morphismes *représentables* de champs algébriques et sur les travaux très généraux d'Illusie ([33]).

Le principal résultat de cette section est le suivant :

**Théorème 3.2.5**

- (1) *Il existe un élément  $\omega \in H^2(\mathcal{X}, I)$  dont l'annulation équivaut à l'existence d'une déformation de  $\mathcal{L}$  à  $T$ .*
- (2) *Si  $\omega = 0$ , alors  $\overline{\text{Defm}_T(\mathcal{L})}$  est un toseur sous  $H^1(\mathcal{X}, I)$ .*
- (3) *Si  $(\widetilde{\mathcal{L}}, \lambda)$  est une déformation de  $\mathcal{L}$ , son groupe d'automorphismes est isomorphe à  $H^0(\mathcal{X}, I)$ .*

Nous l'y étudions sous plusieurs aspects. Nous commençons par montrer que l'on peut le déduire facilement du théorème analogue d'Aoki concernant les déformations de morphismes en prenant comme champ d'arrivée  $\mathcal{Y} = \text{BG}_m$ . Il suffit à peu de choses près de calculer le complexe cotangent du champ classifiant  $\text{BG}_m$  sur un schéma  $T$ . Cependant cette démarche nous a paru insatisfaisante car il s'avère que le cas des faisceaux inversibles est nettement plus simple que celui des déformations de morphismes. Nous proposons donc deux autres démonstrations de ce théorème, indépendantes des travaux que nous venons de citer et de nature plus « géométrique ». La première consiste à se ramener au cas des faisceaux inversibles sur un espace algébrique à l'aide d'une présentation du champ  $\mathcal{X}$  (elle rejoint en cela les démarches d'Olsson et Aoki). La seconde est plus rapide puisque nous travaillons directement avec des faisceaux inversibles sur  $\mathcal{X}$ . Elle nécessite cependant un petit travail technique supplémentaire pour relier les groupes de cohomologie lisse-étale d'un champ à ceux d'une extension infinitésimale de ce champ. Nous avons préféré joindre ces résultats de nature purement cohomologique à l'annexe déjà mentionnée plus haut (cf. paragraphe (A.1.8)).

Cette étude directe des déformations de faisceaux inversibles nous permet de donner une démonstration de la représentabilité du foncteur de Picard (sous de bonnes hypothèses) logiquement indépendante des travaux d'Aoki. Bien entendu nous aurions tout aussi bien pu utiliser le critère [15] 5.3 d'Artin pour qu'un champ soit algébrique au lieu du théorème de représentabilité pour les espaces algébriques [12] 5.3 et obtenir ainsi l'algébricité du champ de Picard. En fait le paragraphe 1.3 montre qu'il est essentiellement équivalent d'étudier le foncteur de Picard ou le champ de Picard (du moins lorsque  $\mathcal{X}$  est cohomologiquement plat en dimension zéro).

Ce chapitre s'achève sur un résultat classique reliant la dimension du schéma de Picard d'un champ algébrique sur un corps (lorsqu'il existe) et sa lissité à l'origine. Nous calculons au passage son espace tangent.

**Composante neutre du foncteur de Picard**

Revenons à des exemples plus concrets et considérons le cas d'une courbe elliptique  $E$  sur un corps  $k$ . On sait dans ce cas que la jacobienne  $\text{Pic}_{E/k}^0$ , c'est-à-dire la composante connexe de l'élément neutre du schéma de Picard  $\text{Pic}_{E/k}$ , est isomorphe à  $E$  et que le schéma de Picard s'identifie à une infinité dénombrable de copies de cette jacobienne indexées par le degré des faisceaux inversibles. Il est bien évident que le schéma de Picard lui-même n'est pas propre. Cependant la jacobienne, elle, est propre. Il en va de même si l'on remplace  $E$  par une courbe projective intègre et lisse sur un corps  $k$ . En fait la jacobienne possède souvent des propriétés de finitude agréables et contient en réalité une grande partie de l'information réellement utile fournie par le schéma de Picard. Sur une base quelconque la situation est naturellement plus complexe car on ne dispose plus d'une

élément neutre mais d'une *section* neutre. La première idée qui vient à l'esprit est de considérer la composante connexe de l'élément neutre dans chaque fibre (c'est un ouvert de la fibre) et d'appeler jacobienne la réunion de toutes ces composantes. Le problème est qu'il n'est pas évident *a priori* que cette construction fournisse un ouvert du foncteur de Picard. Lorsque ce dernier est représentable par un schéma, on peut appliquer le corollaire IV (15.6.5) des EGA ([30]) sur la composante connexe des fibres le long d'une section. Mais il ne s'applique pas tel quel lorsque nous avons affaire à un espace algébrique. Notre premier travail a donc été de généraliser ce résultat au cas des espaces algébriques afin de s'assurer que la construction décrite précédemment fournirait bien un sous-espace algébrique ouvert  $\text{Pic}_{\mathcal{X}/S}^0$  du foncteur de Picard.

Une fois la jacobienne définie, il semble naturel d'espérer qu'elle soit propre sur  $S$  lorsque  $X$  est lisse par exemple. Ceci est en effet vrai lorsque  $\mathcal{X}$  est un schéma (cf. [34] 5.20). Nous avons fait un premier pas vers l'obtention de cette propriété en démontrant le résultat lorsque  $\mathcal{X}$  est un champ algébrique normal sur un corps.

**Théorème 4.2.2** *On suppose que  $\mathcal{X}$  est un champ algébrique propre, géométriquement normal et cohomologiquement plat en dimension zéro sur  $\text{Spec } k$ . Alors la composante neutre  $\text{Pic}_{\mathcal{X}/k}^0$  du schéma de Picard est propre sur  $k$ .*

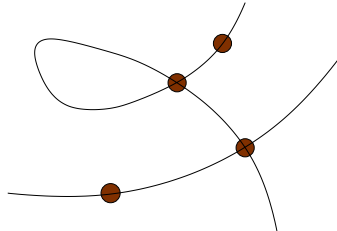
Il suffirait maintenant de relier la propriété de  $\text{Pic}_{\mathcal{X}/S}^0$  à la propriété de chacune de ses fibres pour en déduire que  $\text{Pic}_{\mathcal{X}/S}^0$  est propre dès que  $\mathcal{X}$  est lisse sur  $S$ . Nous espérons aboutir bientôt à ce résultat.

### Quelques exemples

Nous avons essayé de voir à travers deux exemples comment l'ajout d'une « structure champêtre » à un schéma modifie son foncteur de Picard.

Le premier exemple que nous considérons est celui du champ des « racines  $n^{\text{ièmes}}$  d'un faisceau inversible ». On fixe un schéma  $X$ , un faisceau inversible  $\mathcal{L}$  sur  $X$  et un entier  $n$  strictement positif. On peut associer à ces données un champ  $[\mathcal{L}^{\frac{1}{n}}]$  qui classe les faisceaux inversibles  $\mathcal{M}$  munis d'un isomorphisme de  $\mathcal{M}^{\otimes n}$  vers  $\mathcal{L}$ . Alors  $[\mathcal{L}^{\frac{1}{n}}]$  est une  $\mu_n$ -gerbe sur  $X$ , et son foncteur de Picard s'obtient à partir de celui de  $X$  en lui adjoignant d'une manière très naturelle une racine  $n^{\text{ième}}$  de la classe du faisceau  $\mathcal{L}$ .

Plutôt que de mettre une structure champêtre sur le schéma  $X$  tout entier, on peut aussi ajouter à une courbe une structure de  $\mu_r$ -gerbe en quelques points isolés. C'est ce que font Abramovich et Vistoli dans [8]. En essayant de compactifier l'espace des morphismes stables d'une courbe nodale  $C$  vers un champ de Deligne-Mumford  $\mathcal{X}$  fixé, ils se sont aperçus qu'aux points limites il était nécessaire d'autoriser une telle structure en les nœuds de  $C$ , et même en des points marqués. Une courbe tordue d'Abramovich et Vistoli ressemble à quelque chose comme ceci :



où les « gros » points signalent la présence d'une action d'un groupe cyclique  $\mu_r$ . Nous décrivons dans la section 5.3 le foncteur de Picard d'une courbe tordue *lisse*.

## Annexe

Cette dernière partie est un peu différente des autres dans la mesure où elle ne concerne *a priori* pas du tout le foncteur de Picard. C'est ce qui lui a valu l'appellation d'« annexe » mais en réalité elle aurait tout aussi bien pu se trouver tout au début et porter le nom de « résultats préliminaires sur la cohomologie lisse-étale », ce qui aurait d'ailleurs été plus cohérent d'un point de vue purement logique. Nous invitons donc le lecteur soucieux de respecter l'ordre logique des propositions à commencer sa lecture par là.

Cette annexe trouve essentiellement sa raison d'être dans le manque de références sur la cohomologie lisse-étale des champs algébriques. Au fil de nos interrogations sur le foncteur de Picard (et particulièrement sur sa description cohomologique), nous avons naturellement été amené à utiliser des propriétés des groupes de cohomologie qui « ne pouvaient qu'être vraies » (sans quoi les définitions auraient pu être qualifiées de mauvaises et définitivement abandonnées) mais pour lesquelles il ne semble pas exister de référence. Il est bon par exemple de vérifier (cf. (A.1.1.9)), une fois construits les groupes de cohomologie *lisse-étale* d'un champ algébrique  $\mathcal{X}$ , qu'ils coïncident avec les groupes de cohomologie *étale* de  $\mathcal{X}$  lorsque  $\mathcal{X}$  est un schéma (ou plus généralement un champ de Deligne-Mumford). Il convient également de vérifier que si  $\mathcal{F}$  est un faisceau lisse-étale abélien sur  $\mathcal{X}$  et si  $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  est un morphisme de champs algébriques, alors le faisceau image directe supérieure  $R^q f_* \mathcal{F}$  est bien, comme on le pense, le faisceau associé au préfaisceau qui à tout ouvert lisse-étale  $(U, u)$  de  $\mathcal{Y}$  associe le  $q^{\text{ième}}$  groupe de cohomologie de  $\mathcal{X} \times_{\mathcal{Y}} U$  à valeurs dans  $\mathcal{F}_{\mathcal{X} \times_{\mathcal{Y}} U}$ . Contrairement à ce que l'on pourrait croire au premier abord, cette dernière propriété n'est pas une conséquence immédiate de l'étude générale proposée dans SGA4, ceci à cause d'un défaut de fonctorialité du topos lisse-étale des champs algébriques (le foncteur  $f^{-1}$  n'est pas toujours exact). Ce défaut de fonctorialité a pour conséquence fâcheuse que la « machine » SGA4 ne s'applique pas toujours et qu'il faut par conséquent travailler un peu plus finement pour obtenir un certain nombre de propriétés d'apparence pourtant élémentaire sur la cohomologie lisse-étale des champs algébriques. Ce travail a été fait en grande partie par Olsson et Laszlo pour le cas des faisceaux quasi-cohérents (voir [44]) ou des coefficients finis (voir [37]). Mais les faisceaux abéliens qui ne jouissent pas d'une telle structure ont pour l'instant été laissés de côté.

Or le faisceau abélien que l'on rencontre le plus souvent lorsque l'on s'intéresse au foncteur de Picard n'est pas quasi-cohérent : il s'agit de  $\mathbb{G}_m$ . Nous avons donc été amené à démontrer au fil de nos travaux diverses propriétés. Leur nombre croissant nous a finalement conduit à les regrouper dans un chapitre à part. Cette annexe est donc une sorte de « fourre-tout » cohomologique qui, bien loin de prétendre à l'exhaustivité, se contente au contraire de répondre aux strictes exigences des autres chapitres. Nous espérons tout de même que nous aurons ainsi contribué à combler une lacune de la littérature existante. Nous renvoyons à l'introduction de ladite annexe pour un exposé plus détaillé des propriétés que le lecteur intéressé pourra y trouver. Signalons juste l'introduction d'un site un peu plus gros que le site lisse-étale, le site lisse-lisse champêtre, qui induit le même topos mais se comporte de manière un peu plus agréable à certains égards (notamment vis-à-vis des images directes). Il nous a rendu de fiers services et pourra sans doute encore se montrer utile.

## Conventions

Suivant [38], sauf mention expresse du contraire, tous les champs algébriques (*a fortiori* tous les schémas et tous les espaces algébriques) seront quasi-séparés. Un champ « algébrique » non-quasi-séparé, *i.e.* un champ dont la diagonale est représentable et localement de type fini, et qui admet une présentation lisse, sera dit préalgébrique.

# Chapitre 1

## Foncteurs de Picard

En 1965, c'est-à-dire quatre ans avant la parution des premiers articles fondant la théorie des champs, Mumford publie l'article [42]. Il définit en particulier une notion de faisceau inversible sur un « problème de modules »  $\mathcal{M}$ . Un tel faisceau inversible est la donnée d'un faisceau inversible sur  $S$  pour toute famille de courbes  $X \rightarrow S$ , et d'isomorphismes de transition entre ces faisceaux inversibles vérifiant une condition de compatibilité naturelle. Bien que le champ considéré par Mumford se trouve être algébrique, on voit bien que cette condition n'est en rien nécessaire et que la notion de faisceau inversible prend un sens sur un champ quelconque. Mumford définit ensuite le groupe de Picard de  $\mathcal{M}$  comme étant le groupe des classes d'isomorphie de faisceaux inversibles sur  $\mathcal{M}$ , montre que ce groupe est isomorphe au groupe  $H^1(\mathcal{M}, \mathbb{G}_m)$ , puis le calcule à titre d'exemple dans le cas où  $\mathcal{M}$  est le champ  $\mathcal{M}_{1,1}$  des courbes elliptiques.

La notion de faisceau inversible sur un champ est devenue aujourd'hui commune. Nous présentons dans une première section différentes réalisations de la catégorie des faisceaux inversibles sur un champ (parfois algébrique) et nous montrons l'équivalence entre ces différents points de vue. Puis nous définissons le groupe de Picard d'un champ et nous en donnons une interprétation cohomologique. Nous suivons ensuite Grothendieck pour définir les foncteurs de Picard relatifs d'un champ et nous comparons (cf. thm. (1.2.3.1)) les différents foncteurs obtenus. Nous introduisons enfin le champ de Picard, c'est-à-dire le champ des faisceaux inversibles, et tentons de démêler les liens étroits qui l'unissent au foncteur de Picard. Cette partie s'achève sur des propriétés de commutation aux limites inductives ou projectives.

### 1.1 Groupe de Picard d'un champ

#### 1.1.1 Différents visages des faisceaux inversibles

Suivant Mumford (cf. [42] p. 64), nous adoptons la définition ci-dessous.

**Définition 1.1.1.1** *Soit  $\mathcal{X}$  un  $S$ -champ. On note  $p$  son morphisme structural. Un faisceau inversible  $L$  sur  $\mathcal{X}$  est la donnée de :*

- (i) *pour tout  $U \in \text{ob}(\text{Aff}/S)$  et tout  $x \in \text{ob } \mathcal{X}_U$ , un faisceau inversible  $L(x)$  sur  $U$  ;*
- (ii) *pour toute flèche  $\varphi : y \rightarrow x$  dans  $\mathcal{X}$ , un isomorphisme*

$$L(\varphi) : L(y) \longrightarrow p(\varphi)^* L(x) ;$$

vérifiant la condition de compatibilité suivante : si  $\varphi : y \rightarrow x$  et  $\psi : z \rightarrow y$  sont deux flèches composables, on a

$$p(\psi)^* L(\varphi) \circ L(\psi) = L(\varphi \circ \psi)$$

(modulo un isomorphisme canonique que nous nous dispenserons d'écrire).

**Exemple 1.1.1.2** On définit le faisceau trivial  $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$  en posant  $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(x) = \mathcal{O}_{p(x)} = \mathcal{O}_U$  pour tout objet  $x$  de  $\mathcal{X}$  et  $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(\psi) = id_{\mathcal{O}_{p(y)}}$  pour toute flèche  $\psi : y \rightarrow x$ .

Un morphisme entre deux faisceaux inversibles est simplement une collection de morphismes compatibles avec les isomorphismes de changement de base.

**Définition 1.1.1.3** Soient  $L$  et  $M$  deux faisceaux inversibles sur  $\mathcal{X}$ . Un morphisme  $\Phi : L \rightarrow M$  est la donnée pour tout  $x \in \text{ob } \mathcal{X}$  d'un morphisme

$$\Phi(x) : L(x) \longrightarrow M(x)$$

tel que pour tout  $\varphi : y \rightarrow x$  dans  $\mathcal{X}$ , le carré suivant commute (où  $\tilde{\varphi} = p(\varphi)$ ) :

$$\begin{array}{ccc} L(y) & \xrightarrow[\sim]{L(\varphi)} & \tilde{\varphi}^* L(x) \\ \Phi(y) \downarrow & & \downarrow \tilde{\varphi}^* \Phi(x) \\ M(y) & \xrightarrow[\sim]{M(\varphi)} & \tilde{\varphi}^* M(x) \end{array} .$$

On obtient de cette manière une catégorie  $\text{Inv}(\mathcal{X})$  des faisceaux inversibles sur  $\mathcal{X}$ . On notera  $\text{Inv}'(\mathcal{X})$  la sous-catégorie de  $\text{Inv}(\mathcal{X})$  dans laquelle on ne garde que les isomorphismes. Dans le cas où  $\mathcal{X}$  est algébrique, on peut aussi voir un faisceau inversible, de manière peut-être plus naturelle, comme étant un  $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ -module localement libre de rang 1 sur le site lisse-étale<sup>1</sup> de  $\mathcal{X}$  défini dans [38] en (12.1), où  $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$  désigne cette fois le faisceau structural de  $\mathcal{X}$  défini dans loc.cit. en (12.7.1). En fait, la proposition suivante montre que ces deux constructions sont équivalentes. On rappelle qu'un  $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ -module  $\mathcal{M}$  est dit localement libre de rang 1 si pour tout ouvert lisse-étale  $(U, u)$  de  $\mathcal{X}$ , le  $\mathcal{O}_{U_{\text{ét}}}$ -module  $\mathcal{M}_{U, u}$  est localement libre de rang 1. Cela équivaut à dire qu'il existe une présentation  $P : X \rightarrow \mathcal{X}$  de  $\mathcal{X}$  telle que le  $\mathcal{O}_{X_{\text{ét}}}$ -module  $\mathcal{M}_{X, P}$  soit isomorphe à  $\mathcal{O}_{X_{\text{ét}}}$ . Un tel  $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ -module est en particulier cartésien au sens de [38] (12.7.3) d'après la proposition (13.2.1) du même ouvrage.

**Proposition 1.1.1.4** Soit  $\mathcal{X}$  un  $S$ -champ algébrique. On a une équivalence naturelle de catégories entre la catégorie  $\text{Inv}(\mathcal{X})$  des faisceaux inversibles sur  $\mathcal{X}$  et la catégorie des  $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ -modules localement libres de rang 1 sur le champ algébrique annelé  $(\mathcal{X}, \mathcal{O}_{\mathcal{X}})$ .

**Démonstration.** Soit  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ -module localement libre de rang 1 pour la topologie lisse-étale sur  $\mathcal{X}$ . Pour tout  $U \in \text{ob}(\text{Aff}/S)$  et tout morphisme  $u : U \rightarrow \mathcal{X}$ , on pose

$$M(u) = (u^* \mathcal{M})_{\text{zar}}.$$

Les isomorphismes de changement de base  $M(v) \rightarrow \varphi^* M(u)$  se définissent de manière évidente. On vérifie facilement que  $M$  ainsi construit est bien un faisceau inversible, et

1. La définition du site lisse-étale est rappelée en annexe.

que cette construction se prolonge de manière naturelle en un foncteur  $F$  de la catégorie des  $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ -modules localement libres de rang 1, vers la catégorie  $\text{Inv}(\mathcal{X})$ .

Réciproquement, étant donné un système  $(M(u), M(\varphi))$ , montrons comment construire un  $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ -module localement libre de rang 1. D'après le lemme (12.1.2) de [38], il suffit de le construire sur le site  $\underline{\text{Lis-ét}}(\mathcal{X})$ , dont les objets sont les  $(U, u)$  de  $\text{Lis-ét}(\mathcal{X})$  avec  $U \in \text{ob}(\text{Aff}/S)$ , et où les familles couvrantes sont les familles finies de morphismes qui forment une famille couvrante dans  $\text{Lis-ét}(\mathcal{X})$ . Pour un tel  $(U, u)$ , on pose

$$\mathcal{M}(U, u) = \Gamma(U, M(u)).$$

Les flèches de restriction sont définies de manière évidente à partir des isomorphismes  $M(\varphi)$ . Remarquons que pour tout ouvert lisse-étale  $(U, u)$  de  $\mathcal{X}$ , le faisceau étale  $\mathcal{M}_{U,u}$  n'est autre que  $\varepsilon^* M(u)$ , où  $\varepsilon$  est le morphisme naturel de topos de  $U_{\text{ét}}$  dans  $U_{\text{zar}}$ .<sup>2</sup>

Le foncteur  $G$  ainsi défini est clairement un inverse à gauche de  $F$ . Il reste à montrer que c'est un inverse à droite. On part d'un faisceau inversible  $M$  donné par un système  $(M(u), M(\varphi))$ , et on lui associe  $\mathcal{M} = G(M)$ . Il faut montrer que pour tout  $U \in \text{ob}(\text{Aff}/S)$  et tout  $u \in \text{ob} \mathcal{X}_U$ ,  $M(u)$  est canoniquement isomorphe à  $u^* \mathcal{M}$ . Pour ce faire, il suffit de montrer que pour tout ouvert  $(V, v)$  de  $\underline{\text{Lis-ét}}(U)$ ,  $(u^* \mathcal{M})_{V,v}$  est canoniquement isomorphe à  $M(u)_{V,v} = v^* M(u)$ . Or

$$(u^* \mathcal{M})_{V,v} = \varinjlim (f^* \mathcal{M}_{U',u'})$$

où la limite inductive est prise sur l'ensemble des diagrammes 2-commutatifs

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{v} & U \\ f \downarrow & & \downarrow u \\ U' & \xrightarrow{u'} & \mathcal{X} \end{array}$$

où  $(U', u') \in \text{ob} \underline{\text{Lis-ét}}(\mathcal{X})$ . Pour un tel diagramme, la définition de  $\mathcal{M}$  et le fait que  $(U', u')$  soit un ouvert lisse-étale montrent que  $\mathcal{M}_{U',u'} \simeq M(u')$ . Alors grâce aux isomorphismes de changement de base sous-jacents à  $M$ , on obtient un isomorphisme entre  $f^* \mathcal{M}_{U',u'}$  et  $v^* M(u)$ , donc  $(u^* \mathcal{M})_{V,v} \simeq v^* M(u)$ , ce qui montre le résultat attendu.  $\square$

**Remarque 1.1.1.5** Si  $\mathcal{X} = X$  est un  $S$ -espace algébrique, l'équivalence de catégories

$$\text{Mod}_{\text{qcoh}}(\mathcal{O}_{X_{\text{ét}}}) \xrightarrow{\sim} \text{Mod}_{\text{qcoh}}(\mathcal{O}_{X_{\text{lis-ét}}})$$

mentionnée dans [38] (13.2.3) induit une équivalence entre la catégorie  $\text{Inv}(\mathcal{X})$  définie ci-dessus et la catégorie des faisceaux inversibles sur  $X$  au sens étale.

En particulier si  $X$  est un  $S$ -schéma on a une équivalence de catégories naturelle entre la catégorie  $\text{Inv}(\mathcal{X})$  et la catégorie des faisceaux inversibles sur  $X$  au sens de Zariski.

Le résultat ci-dessous découle de l'étude de la descente fidèlement plate des modules quasi-cohérents proposée dans [38]. Nous ne l'énonçons que pour le cas particulier des faisceaux inversibles car c'est là l'objet principal de notre étude, mais en réalité le paragraphe (13.5) de [38] montre qu'il est encore valable tel quel en remplaçant « faisceau inversible » par « module quasi-cohérent ». Il nous sera surtout utile lorsque le morphisme  $f$  est une présentation de  $\mathcal{X}$  par un espace algébrique ou un schéma.

2. Le foncteur  $\varepsilon^*$  induit une équivalence de catégories entre les faisceaux inversibles sur  $U$  au sens étale et les faisceaux inversibles au sens de Zariski. À partir de maintenant nous identifierons ces deux catégories.



**Proposition 1.1.1.6 ([38] (13.5))** *Soit  $f : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$  un morphisme fidèlement plat de champs algébriques, que l'on suppose de plus quasi-compact ou localement de présentation finie. Alors la catégorie des faisceaux inversibles sur  $\mathcal{X}$  est équivalente à la catégorie suivante. Un objet est un couple  $(\mathcal{L}, \alpha)$  où  $\mathcal{L}$  est un faisceau inversible sur  $\mathcal{Y}$  et  $\alpha : p_1^* \mathcal{L} \rightarrow p_2^* \mathcal{L}$  est un isomorphisme tel que, à des isomorphismes canoniques près,  $(p_{23}^* \alpha) \circ (p_{12}^* \alpha) = p_{13}^* \alpha$ . Un morphisme de  $(\mathcal{L}, \alpha)$  vers  $(\mathcal{M}, \beta)$  est un morphisme  $\gamma : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{M}$  tel que  $(p_2^* \gamma) \circ \alpha = \beta \circ (p_1^* \gamma)$ .*

**Démonstration.** Avec les notations de [38] (13.5), la catégorie décrite ci-dessus est équivalente à la catégorie des  $\mathcal{O}_{\mathcal{Y}}$ -modules quasi-cohérents cartésiens et localement libres de rang 1. Par (13.5.5), le morphisme  $f$  est de descente cohomologique effective, et donc par (13.5.4), il induit une équivalence de catégories entre la catégorie des  $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ -modules quasi-cohérents et la catégorie des  $\mathcal{O}_{\mathcal{Y}}$ -modules quasi-cohérents cartésiens. Il est clair que cette équivalence de catégories préserve les faisceaux inversibles.  $\square$

LES FAISCEAUX INVERSIBLES COMME MORPHISMES DE  $\mathcal{X}$  DANS  $\mathrm{BG}_m$ .

Si  $\mathcal{X}$  et  $\mathcal{Y}$  sont deux  $S$ -champs algébriques,  $\mathrm{Hom}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$  est la catégorie dont les objets sont les 1-morphismes de  $\mathcal{X}$  vers  $\mathcal{Y}$  et dont les flèches sont les 2-isomorphismes entre les 1-flèches. On rappelle aussi que l'on note  $\mathrm{BG}_m$  le  $S$ -champ dont la fibre en  $U$  est la catégorie des  $\mathbb{G}_m$ -torseurs sur  $U$ .

**Proposition 1.1.1.7** *La catégorie  $\mathrm{Inv}'(\mathcal{X})$  des faisceaux inversibles sur  $\mathcal{X}$  est équivalente à la catégorie  $\mathrm{Hom}(\mathcal{X}, \mathrm{BG}_m)$ .*

**Démonstration.** Un morphisme  $F : \mathcal{X} \rightarrow \mathrm{BG}_m$  est la donnée pour tout  $U \in \mathrm{ob}(\mathrm{Aff}/S)$  et pour tout  $x \in \mathrm{ob} \mathcal{X}_U$  d'un  $\mathbb{G}_m$ -torseur  $F(x)$  sur  $U$ , ces données étant de plus compatibles au changement de base. Autrement dit pour toute flèche  $\varphi : V \rightarrow U$  dans  $(\mathrm{Aff}/S)$  et pour tout  $x \in \mathrm{ob} \mathcal{X}_U$ , on se donne un isomorphisme  $F(\varphi, x) : F(\varphi^* x) = F(x \circ \varphi) \rightarrow \varphi^* F(x)$ . Le résultat découle donc simplement du fait que la donnée d'un  $\mathbb{G}_m$ -torseur sur  $U$  est équivalente à la donnée d'un faisceau inversible sur  $U$ .  $\square$

### 1.1.2 Description du groupe de Picard

On définit de manière naturelle le produit tensoriel de deux faisceaux inversibles en posant<sup>3</sup> :

$$(L \otimes M)(x) = L(x) \otimes M(x),$$

$$(L \otimes M)(\varphi) = L(\varphi) \otimes M(\varphi).$$

On vérifie alors que le produit tensoriel préserve les classes d'isomorphie, que le faisceau structural  $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$  est neutre, et que tout faisceau inversible a un inverse donné par :

$$L^{-1}(x) = L(x)^{-1} = \mathcal{H}om(L(x), \mathcal{O}_U)$$

et  $L^{-1}(\varphi)$  est induit par  $L(\varphi)$ . Il est clair que ce produit tensoriel coïncide avec le produit tensoriel des faisceaux quasi-cohérents via les équivalences de catégories ci-dessus. On peut alors poser la définition suivante.

**Définition 1.1.2.1** *On appelle groupe de Picard de  $\mathcal{X}$  l'ensemble  $\mathrm{Pic} \mathcal{X}$  des classes d'isomorphie de faisceaux inversibles muni de la loi de groupe induite par le produit tensoriel.*

3. Il est préférable de procéder ainsi plutôt que de considérer le produit tensoriel des faisceaux localement libres de rang 1 sur le site lisse-étale d'un champ algébrique, car ce dernier n'aurait plus de sens sur un champ quelconque.

**Remarque 1.1.2.2** Si  $\mathcal{X}$  est un schéma ou un espace algébrique, la remarque (1.1.1.5) montre que l'on retrouve ainsi le groupe de Picard usuel.

**Fonctorialité** Soit  $F : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  un morphisme de champs algébriques, et soit  $L$  un faisceau inversible sur  $\mathcal{Y}$ . On définit l'image inverse  $F^*L$  de  $L$  en posant pour tout  $x \in \text{ob } \mathcal{X}$ ,  $F^*L(x) = L(F(x))$ , et pour tout  $\varphi : y \rightarrow x$  dans  $\mathcal{X}$ ,  $F^*L(\varphi) = L(F(\varphi))$ . On vérifie que  $F^*L$  ainsi défini est bien un faisceau inversible sur  $\mathcal{X}$ . Le foncteur  $F^*$  se définit de manière tout aussi évidente sur les flèches. De plus il préserve le produit tensoriel, donc il induit un morphisme de groupes  $\text{Pic} F : \text{Pic} \mathcal{Y} \rightarrow \text{Pic} \mathcal{X}$ .

**Remarque 1.1.2.3** Via l'équivalence de catégories 1.1.1.4, le foncteur  $F^*$  défini ci-dessus correspond au foncteur image inverse défini au chapitre 12 de [38].

La description cohomologique traditionnelle du groupe de Picard est encore valable.

**Proposition 1.1.2.4** Soit  $\mathcal{X}$  un  $S$ -champ algébrique. Alors :

$$\text{Pic} \mathcal{X} \simeq H^1(\mathcal{X}, \mathbb{G}_m),$$

où  $H^1(\mathcal{X}, \mathbb{G}_m)$  est le premier groupe de cohomologie du faisceau  $\mathbb{G}_m$  sur  $\mathcal{X}$  muni de la topologie lisse-étale calculé au sens des foncteurs dérivés.

**Démonstration.** Soit  $T \rightarrow \mathcal{X}$  une présentation de  $\mathcal{X}$ . On reprend ici les notations de l'annexe (A.1.4) qui précèdent le théorème (A.1.4.1). On considère en particulier le premier groupe de cohomologie « à la Čech » associé à cette présentation :

$$\check{H}^1(H^0(T^\bullet, \mathbb{G}_m)) = \frac{\text{Ker}(p_{23}^* - p_{13}^* + p_{12}^*)}{\text{Im}(p_1^* - p_2^*)}.$$

En observant que pour tout  $i$ ,  $\mathbb{G}_m(T^i) = \text{Aut}(\mathcal{O}_{T^i})$ , on voit que se donner un 1-cocycle de Čech à valeurs dans  $\mathbb{G}_m$  revient à se donner une donnée de descente sur  $\mathcal{O}_T$ , et que deux telles données de descente  $g_1, g_2$  définissent le même élément dans  $\check{H}^1(H^0(T^\bullet, \mathbb{G}_m))$  si et seulement si  $(\mathcal{O}_T, g_1)$  et  $(\mathcal{O}_T, g_2)$  sont isomorphes dans la catégorie des faisceaux inversibles sur  $T$  munis d'une donnée de descente relativement à  $T \rightarrow \mathcal{X}$ . Compte tenu de l'équivalence (1.1.1.6) entre cette catégorie et la catégorie des faisceaux inversibles sur  $\mathcal{X}$ , on voit que le groupe  $\check{H}^1(H^0(T^\bullet, \mathbb{G}_m))$  s'identifie à l'ensemble des classes d'isomorphie de faisceaux inversibles sur  $\mathcal{X}$  dont l'image inverse sur  $T$  est isomorphe à  $\mathcal{O}_T$ , donc au groupe  $\text{Ker}(\text{Pic}(\mathcal{X}) \rightarrow \text{Pic}(T))$ . De plus cet isomorphisme est fonctoriel en  $T$ . En passant à la limite inductive, on obtient un isomorphisme

$$\lim_{\rightarrow} \check{H}^1(H^0(T^\bullet, \mathbb{G}_m)) \simeq \text{Pic} \mathcal{X},$$

où la limite inductive est prise sur l'ensemble des présentations lisses  $T \rightarrow \mathcal{X}$  de  $\mathcal{X}$ . On dispose par ailleurs de la suite exacte en bas degrés associée à la suite spectrale de descente (A.1.4.1) :

$$0 \rightarrow \check{H}^1(H^0(T^\bullet, \mathbb{G}_m)) \rightarrow H^1(\mathcal{X}, \mathbb{G}_m) \rightarrow \check{H}^0(H^1(T^\bullet, \mathbb{G}_m)).$$

Cette suite exacte étant fonctorielle en  $T$ , on voit que les injections des  $\check{H}^1(H^0(T^\bullet, \mathbb{G}_m))$  dans  $H^1(\mathcal{X}, \mathbb{G}_m)$  induisent un morphisme injectif

$$\lim_{\rightarrow} \check{H}^1(H^0(T^\bullet, \mathbb{G}_m)) \rightarrow H^1(\mathcal{X}, \mathbb{G}_m).$$

Pour conclure, il ne reste plus qu'à montrer, vu la suite exacte en bas degrés ci-dessus, que pour tout  $x \in H^1(\mathcal{X}, \mathbb{G}_m)$ , il existe une présentation  $T \rightarrow \mathcal{X}$  telle que l'image de  $x$  dans  $H^1(T, \mathbb{G}_m)$  soit nulle. Soit  $0 \rightarrow \mathbb{G}_m \rightarrow \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{Q} \rightarrow 0$  une suite exacte de faisceaux abéliens, avec  $\mathcal{I}$  injectif. On a alors un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} H^0(\mathcal{X}, \mathcal{I}) & \longrightarrow & H^0(\mathcal{X}, \mathcal{Q}) & \longrightarrow & H^1(\mathcal{X}, \mathbb{G}_m) & \longrightarrow & H^1(\mathcal{X}, \mathcal{I}) = 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ H^0(T, \mathcal{I}|_T) & \longrightarrow & H^0(T, \mathcal{Q}|_T) & \longrightarrow & H^1(T, \mathbb{G}_m) & & \end{array}$$

dans lequel les lignes sont exactes. Soit  $s \in H^0(\mathcal{X}, \mathcal{Q})$  un antécédent de  $x$ . Comme  $\mathcal{Q}$  est le faisceau quotient  $\mathcal{I}/\mathbb{G}_m$  on sait par définition du faisceau associé à un préfaisceau que  $s$  provient localement de  $\mathcal{I}$ . Autrement dit il existe une présentation de  $\mathcal{X}$  telle que  $s|_T \in H^0(T, \mathcal{Q}|_T)$  provienne de  $H^0(T, \mathcal{I}|_T)$ , auquel cas l'image de  $x$  dans  $H^1(T, \mathbb{G}_m)$  est nulle, conformément à nos exigences.  $\square$

## 1.2 Les foncteurs de Picard relatifs

### 1.2.1 Définitions et premières propriétés

**Définition 1.2.1.1** Soit  $\mathcal{X}$  un  $S$ -champ. Le foncteur de Picard naïf de  $\mathcal{X}/S$  est le foncteur :

$$\text{Pic}_{\mathcal{X}} : \begin{cases} (Sch/S)^\circ \longrightarrow (Gr) \\ T \longmapsto \text{Pic}(\mathcal{X} \times_S T) \end{cases}.$$

Le foncteur de Picard naïf (parfois aussi appelé foncteur de Picard absolu, même si cette terminologie peut sembler étrange dans la mesure où il dépend évidemment de  $S$ ) ayant aussi peu de chances d'être représentable que dans le cas des schémas, on définit encore des foncteurs de Picard relatifs obtenus par faisceautisation relativement à des topologies de plus en plus fines.

**Définition 1.2.1.2** Nous noterons  $P_{\mathcal{X}/S}$  le foncteur suivant :

$$P_{\mathcal{X}/S} : \begin{cases} (Sch/S)^\circ \longrightarrow (Gr) \\ T \longmapsto \text{Pic}(\mathcal{X} \times_S T)/\text{Pic}(T) \end{cases}.$$

Nous noterons  $\text{Pic}_{\mathcal{X}/S}(\text{Zar})$  (resp.  $\text{Pic}_{\mathcal{X}/S}(\text{Ét})$ ,  $\text{Pic}_{\mathcal{X}/S}(\text{fppf})$ ) le faisceau associé à  $P_{\mathcal{X}/S}$  pour la topologie de Zariski (resp. étale, fppf).

**Remarque 1.2.1.3** Nous avons donc cinq foncteurs de Picard avec des morphismes naturels  $\text{Pic}_{\mathcal{X}} \rightarrow P_{\mathcal{X}/S} \rightarrow \text{Pic}_{\mathcal{X}/S}(\text{Zar}) \rightarrow \text{Pic}_{\mathcal{X}/S}(\text{Ét}) \rightarrow \text{Pic}_{\mathcal{X}/S}(\text{fppf})$ , et il est facile de voir que les trois derniers sont les faisceaux associés, pour la topologie indiquée, à chacun des foncteurs précédents, y compris le foncteur de Picard absolu  $\text{Pic}_{\mathcal{X}}$ .

**Remarque 1.2.1.4** Il est tout aussi formel de voir que si  $\text{Pic}_{\mathcal{X}/S}$  désigne l'un des cinq foncteurs définis ci-dessus, alors

$$\text{Pic}_{\mathcal{X}/S}(T) \simeq \text{Pic}_{(\mathcal{X} \times_S T)/T}(T).$$

En particulier la formation de ces foncteurs commute au changement de base.

**Remarque 1.2.1.5** On peut d'ores et déjà comparer les groupes de sections de ces différents foncteurs dans quelques cas particuliers grâce à la remarque de topologie suivante. Supposons que  $U$  soit un  $S$ -schéma affine tel que, pour toute famille couvrante  $(U_i \rightarrow U)_{i \in I}$  pour une certaine topologie  $(Top)$ , il existe un indice  $i \in I$  tel que le morphisme  $U_i \rightarrow U$  ait une section. Alors le morphisme  $\mathrm{Pic}_{\mathcal{X}}(U) \rightarrow \mathrm{Pic}_{\mathcal{X}/S(Top)}(U)$  est un isomorphisme. Ceci est vrai en particulier pour la topologie de Zariski lorsque  $U = \mathrm{Spec} A$  est le spectre d'un anneau local. On obtient donc dans ce cas un isomorphisme :

$$\mathrm{Pic}_{\mathcal{X}}(A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Pic}_{\mathcal{X}/S(\mathrm{Zar})}(A) .$$

Si  $A$  est un anneau local strictement hensélien, la condition précédente est vérifiée pour  $U = \mathrm{Spec} A$  avec la topologie étale, d'où un isomorphisme :

$$\mathrm{Pic}_{\mathcal{X}}(A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Pic}_{\mathcal{X}/S(\mathrm{Ét})}(A) .$$

Il en va encore de même lorsque  $U$  est le spectre d'un corps algébriquement clos pour la topologie  $(fppf)$ .

**Proposition 1.2.1.6** *Soit  $\mathcal{X}$  un  $S$ -champ algébrique. Alors pour tout  $S$ -schéma  $T$  :*

$$\mathrm{Pic}_{\mathcal{X}/S(\mathrm{Ét})}(T) \simeq H^0(T, R^1 f_{T*} \mathbb{G}_m)$$

$$\mathrm{Pic}_{\mathcal{X}/S(fppf)}(T) \simeq H_{\mathrm{pl}}^0(T, R^1 f_{T*}^{\mathrm{pl}} \mathbb{G}_m) .$$

**Démonstration.** D'après la proposition (A.1.6.1) appliquée au morphisme  $f_T : \mathcal{X}_T = \mathcal{X} \times_S T \rightarrow T$  la restriction au site étale de  $T$  du faisceau  $R^1 f_{T*} \mathbb{G}_m$  est le faisceau étale associé à

$$U \longmapsto H^1(\mathcal{X}_T \times_T U, \mathbb{G}_m) = \mathrm{Pic}_{\mathcal{X}_T}(U) .$$

Donc  $(R^1 f_{T*} \mathbb{G}_m)_{\mathrm{ét}} = \mathrm{Pic}_{\mathcal{X}_T/T(\mathrm{Ét})}$  et en particulier

$$H^0(T, R^1 f_{T*} \mathbb{G}_m) = \mathrm{Pic}_{\mathcal{X}_T/T(\mathrm{Ét})}(T) = \mathrm{Pic}_{\mathcal{X}/S(\mathrm{Ét})}(T) .$$

On obtient la seconde assertion en appliquant exactement le même raisonnement pour la topologie  $fppf$ . On utilise (A.2.1.4) au lieu de (A.1.6.1).  $\square$

## 1.2.2 Morphismes cohomologiquement plats en dimension zéro

Afin de comparer ces différents foncteurs, comme dans le cas des schémas, la notion de morphisme cohomologiquement plat en dimension zéro nous sera utile. Commençons par remarquer que si  $F : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  est un morphisme de champs algébriques, on a un morphisme naturel

$$F^{\sharp} : \mathcal{O}_{\mathcal{Y}} \rightarrow F_* \mathcal{O}_{\mathcal{X}} . \quad (1.1)$$

En effet, compte tenu des définitions, un tel morphisme correspond à la donnée, pour tout ouvert lisse-étale  $(U, u)$  de  $\mathcal{Y}$ , d'un morphisme  $\mathcal{O}_U \rightarrow \varprojlim \varphi_* \mathcal{O}_V$  où la limite projective est prise sur l'ensemble des carrés 2-commutatifs

$$\begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & \mathcal{X} \\ \varphi \downarrow & & \downarrow F \\ U & \xrightarrow{u} & \mathcal{Y} \end{array} ,$$

avec  $(V, v) \in \text{ob Lis-ét}(\mathcal{X})$ . Pour chaque  $(U, u)$ , on prend le morphisme de  $\mathcal{O}_U$  vers  $\varprojlim \varphi_* \mathcal{O}_V$  induit par le système compatible des  $\mathcal{O}_U \rightarrow \varphi_* \mathcal{O}_V$ .

**Définition 1.2.2.1** On dit qu'un morphisme de champs algébriques  $F : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  est cohomologiquement plat en dimension zéro s'il est plat et si le morphisme (1.1) ci-dessus est un isomorphisme universellement.

**Remarque 1.2.2.2** On rappelle que si  $\mathcal{X}$  est un champ algébrique, et si  $\mathcal{F}$  est un faisceau sur  $\mathcal{X}$ , on définit l'ensemble des sections globales de  $\mathcal{F}$  par

$$\Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{F}) = \Gamma(S, (A_* \mathcal{F})_{S, \text{Id}}),$$

où  $A : \mathcal{X} \rightarrow S$  est le morphisme structural de  $\mathcal{X}$ . Alors si  $F : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  est cohomologiquement plat en dimension zéro, il résulte des définitions que

$$\Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{O}_{\mathcal{X}}) = \Gamma(\mathcal{Y}, \mathcal{O}_{\mathcal{Y}}).$$

On en déduit

$$\text{Aut}(\mathcal{O}_{\mathcal{X}}) = \text{Aut}(\mathcal{O}_{\mathcal{Y}}).$$

**Remarque 1.2.2.3** Un morphisme cohomologiquement plat en dimension zéro est surjectif. En effet, montrons que pour tout point  $s : \text{Spec } k \rightarrow \mathcal{Y}$  de  $\mathcal{Y}$ , la fibre  $\mathcal{X}_s$  de  $\mathcal{X}$  au-dessus de  $s$  est non vide. Le morphisme  $\mathcal{X}_s \rightarrow \text{Spec } k$  est encore cohomologiquement plat en dimension zéro et en particulier on a  $\Gamma(\mathcal{X}_s, \mathcal{O}_{\mathcal{X}_s}) = \Gamma(\text{Spec } k, \mathcal{O}_{\text{Spec } k}) = k$ . L'assertion résulte alors du fait qu'un champ algébrique est vide si et seulement si l'anneau de ses sections globales est réduit à zéro.

**Remarque 1.2.2.4** On déduit de la remarque précédente que si  $S$  est un schéma et  $f : \mathcal{X} \rightarrow S$  un morphisme localement de présentation finie et cohomologiquement plat en dimension zéro de  $S$ -champs algébriques alors  $f$  a une section localement pour la topologie  $(fppf)$  sur  $S$ . On vient en effet de voir que  $f$  est surjectif, donc il est fidèlement plat. Soit  $S' \rightarrow S$  une présentation de  $S$  par un schéma. Alors la famille  $(S' \rightarrow S)$  est une famille couvrante pour la topologie  $(fppf)$ , et il est clair que le morphisme induit par  $f$  sur  $S'$  a une section.

**Remarque 1.2.2.5** La notion de platitude cohomologique est intimement liée à la connexité des fibres géométriques. En effet on peut montrer que si  $\mathcal{X}$  est cohomologiquement plat en dimension zéro sur  $\mathcal{Y}$ , ses fibres sont géométriquement connexes. Il suffit pour cela de montrer que  $\mathcal{X}$  est connexe dans le cas où  $\mathcal{Y}$  est le spectre d'un corps  $L$ . C'est immédiat puisque l'anneau  $\Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{O}_{\mathcal{X}})$  est alors isomorphe à  $L$ , donc intègre.

**Remarque 1.2.2.6** Réciproquement, dans le cas où le morphisme  $f$  est propre et plat, il suffit que les fibres de  $\mathcal{X}$  soient géométriquement connexes et géométriquement réduites pour que  $\mathcal{X}$  soit cohomologiquement plat en dimension zéro sur  $\mathcal{Y}$ . En effet, commençons par montrer que pour tout point géométrique  $y : \text{Spec } \Omega \rightarrow \mathcal{Y}$  de  $\mathcal{Y}$ , l'anneau  $H^0(\mathcal{X}_y)$  des fonctions globales sur la fibre géométrique  $\mathcal{X}_y$  est égal à  $\Omega$ . D'après le théorème de finitude pour les morphismes propres, c'est une algèbre de dimension finie sur  $\Omega$ . Comme  $\mathcal{X}_y$  est connexe et réduit,  $\text{Spec } H^0(\mathcal{X}_y)$  l'est aussi, donc c'est le spectre d'un corps (puisque'il est par ailleurs fini sur  $\Omega$ ). Comme  $\Omega$  est algébriquement clos on a bien  $H^0(\mathcal{X}_y) = \Omega$ . Ceci prouve en particulier que la fonction qui à  $y$  associe  $\dim_{\kappa}(y) H^0(\mathcal{X}_y)$  est constante sur  $\mathcal{Y}$ . On en conclut avec les résultats classiques sur la cohomologie et les changements de base que le morphisme  $f^\sharp : \mathcal{O}_{\mathcal{Y}} \rightarrow f_* \mathcal{O}_{\mathcal{X}}$  est un isomorphisme (au moins lorsque  $\mathcal{Y}$  est noethérien et réduit).

Le lemme suivant donne un critère de « trivialité relative » pour un faisceau inversible sur un  $\mathcal{Y}$ -champ algébrique  $\mathcal{X}$  cohomologiquement plat en dimension zéro.

**Lemme 1.2.2.7** *Soit  $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  un morphisme quasi-compact et cohomologiquement plat en dimension zéro de  $S$ -champs algébriques. Soit  $\mathcal{L}$  un faisceau inversible sur  $\mathcal{X}$ . Les propositions suivantes sont équivalentes :*

(1) *Le morphisme naturel d'adjonction*

$$a_{\mathcal{L}} : f^* f_* \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$$

*est un isomorphisme.*

(2) *Il existe un faisceau inversible  $\mathcal{M}$  sur  $\mathcal{Y}$  tel que  $f^* \mathcal{M}$  soit isomorphe à  $\mathcal{L}$ .*

**Démonstration.** Pour montrer l'implication (1)  $\Rightarrow$  (2), il suffit de montrer que le faisceau  $f_* \mathcal{L}$  est inversible. Par [38] (13.2.6) (iii), on sait déjà que c'est un faisceau quasi-cohérent, et vu l'hypothèse ci-dessus, son image par  $f^*$  est un faisceau inversible. De plus  $f$  est un morphisme fidèlement plat et quasi-compact, donc par descente fidèlement plate (cf. (1.1.1.6)) on en déduit que  $f_* \mathcal{L}$  est inversible.

Pour la réciproque, considérons tout d'abord le cas où  $\mathcal{L}$  est le faisceau structural  $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ . Le morphisme  $f^{\sharp} : \mathcal{O}_{\mathcal{Y}} \rightarrow f_* \mathcal{O}_{\mathcal{X}}$  est un isomorphisme par hypothèse, et son adjoint  $f^* \mathcal{O}_{\mathcal{Y}} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{X}}$  en est évidemment un aussi. De plus le diagramme

$$\begin{array}{ccc} f^* \mathcal{O}_{\mathcal{Y}} & \xrightarrow{f^*(f^{\sharp})} & f^* f_* \mathcal{O}_{\mathcal{X}} \\ & \searrow & \swarrow a_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}} \\ & \mathcal{O}_{\mathcal{X}} & \end{array}$$

commute, ce qui prouve que  $a_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}}$  est un isomorphisme.

Le cas où  $\mathcal{L}$  est trivial s'en déduit immédiatement. Dans le cas général, soit  $\mathcal{M}$  un faisceau inversible sur  $\mathcal{Y}$  tel que  $\mathcal{L}$  soit isomorphe à  $f^* \mathcal{M}$ , et soit  $\pi : Y \rightarrow \mathcal{Y}$  une présentation de  $\mathcal{Y}$  telle que  $\pi^* \mathcal{M}$  soit trivial. On note  $\mathcal{X}'$  le champ algébrique obtenu par changement de base.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X}' & \xrightarrow{\pi'} & \mathcal{X} \\ f' \downarrow & \square & \downarrow f \\ Y & \xrightarrow{\pi} & \mathcal{Y} \end{array}$$

Notons  $\psi$  le morphisme naturel de  $\pi^* f_* \mathcal{L}$  vers  $f'_* \pi'^* \mathcal{L}$ . On a de manière purement formelle un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} & & \pi'^* f^* f_* \mathcal{L} & \xrightarrow{\pi'^* a_{\mathcal{L}}} & \pi'^* \mathcal{L} \\ f'^* \pi^* f_* \mathcal{L} & \xrightarrow[\text{can.}]{\sim} & & & \\ & \searrow f'^* \psi & f'^* f'_* (\pi'^* \mathcal{L}) & \xrightarrow{a_{\pi'^* \mathcal{L}}} & \end{array}$$

Or  $a_{\pi'^* \mathcal{L}}$  est un isomorphisme d'après le cas précédent puisque  $\pi'^* \mathcal{L}$  est trivial. Par ailleurs, comme  $\pi$  est plat, le morphisme  $\psi$  est un isomorphisme en vertu de la proposition (A.1.7.4), ce qui montre que  $\pi'^* a_{\mathcal{L}}$  est un isomorphisme. Enfin, en utilisant la théorie de la descente fidèlement plate des modules quasi-cohérents (cf. [38] (13.5)), on en déduit que  $a_{\mathcal{L}}$  est un isomorphisme.  $\square$

### 1.2.3 Le théorème de comparaison

Le théorème suivant permet de comparer les différents foncteurs de Picard d'un champ algébrique. Il généralise [34] 2.5.

**Théorème 1.2.3.1** *Soit  $f : \mathcal{X} \rightarrow S$  un  $S$ -champ algébrique cohomologiquement plat en dimension zéro. Alors les morphismes naturels*

$$P_{\mathcal{X}/S} \xrightarrow{i_1} \mathrm{Pic}_{\mathcal{X}/S}(\mathrm{Zar}) \xrightarrow{i_2} \mathrm{Pic}_{\mathcal{X}/S}(\mathrm{Ét})$$

*sont injectifs, et le morphisme naturel*

$$\mathrm{Pic}_{\mathcal{X}/S}(\mathrm{Ét}) \longrightarrow \mathrm{Pic}_{\mathcal{X}/S}(\mathrm{fppf})$$

*est un isomorphisme. Si de plus  $f$  a une section localement pour la topologie de Zariski, alors  $i_2$  est un isomorphisme. Enfin si  $f$  a une section,  $i_1$  est lui aussi un isomorphisme.*

**Démonstration.** Soit  $T$  un  $S$ -schéma. La suite spectrale de Leray

$$H^p(T, R^q f_{T*} \mathbb{G}_m) \Rightarrow H^{p+q}(\mathcal{X}_T, \mathbb{G}_m)$$

induit la suite exacte longue en bas degrés suivante :

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^1(T, f_{T*} \mathbb{G}_m) \rightarrow H^1(\mathcal{X}_T, \mathbb{G}_m) \rightarrow H^0(T, R^1 f_{T*} \mathbb{G}_m) \rightarrow \\ \rightarrow H^2(T, f_{T*} \mathbb{G}_m) \rightarrow H^2(\mathcal{X}_T, \mathbb{G}_m) \end{aligned}$$

(où tous les calculs sont effectués pour la topologie lisse-étale sur le champ algébrique considéré. En particulier lorsqu'il s'agit d'un schéma, cela revient d'après (A.1.1.9) à calculer sa cohomologie pour la topologie étale.) Le morphisme  $f$  étant cohomologiquement plat en dimension zéro, on a  $f_{T*} \mathbb{G}_m = \mathbb{G}_m$ . D'après les propriétés précédentes, le début de la suite exacte ci-dessus fournit la suite exacte :

$$0 \rightarrow \mathrm{Pic}(T) \rightarrow \mathrm{Pic}(\mathcal{X}_T) \rightarrow \mathrm{Pic}_{\mathcal{X}/S}(\mathrm{Ét})(T)$$

ce qui montre que le morphisme naturel  $P_{\mathcal{X}/S} \rightarrow \mathrm{Pic}_{\mathcal{X}/S}(\mathrm{Ét})$  est injectif. Il en résulte, d'une part, que le morphisme naturel  $P_{\mathcal{X}/S} \rightarrow \mathrm{Pic}_{\mathcal{X}/S}(\mathrm{Zar})$  est injectif, et d'autre part, en appliquant le foncteur « faisceau associé pour la topologie de Zariski », que le morphisme naturel  $\mathrm{Pic}_{\mathcal{X}/S}(\mathrm{Zar}) \rightarrow \mathrm{Pic}_{\mathcal{X}/S}(\mathrm{Ét})$  est injectif. En effet, ce foncteur est exact (c'est un fait général dans le cadre des topologies de Grothendieck) et laisse  $\mathrm{Pic}_{\mathcal{X}/S}(\mathrm{Ét})$  invariant puisque c'est déjà un faisceau pour la topologie de Zariski.

Dans le cas où  $f$  a une section, le morphisme induit par  $f$  de  $H^2(T, f_{T*} \mathbb{G}_m)$  vers  $H^2(\mathcal{X}_T, \mathbb{G}_m)$  a une rétraction, donc il est injectif. Mais alors la flèche de  $H^0(T, R^1 f_{T*} \mathbb{G}_m)$  vers  $H^2(T, f_{T*} \mathbb{G}_m)$  est nulle, et donc  $H^1(\mathcal{X}_T, \mathbb{G}_m) \rightarrow H^0(T, R^1 f_{T*} \mathbb{G}_m)$  est surjectif, d'où une suite exacte courte :

$$0 \rightarrow \mathrm{Pic}(T) \rightarrow \mathrm{Pic}(\mathcal{X}_T) \rightarrow \mathrm{Pic}_{\mathcal{X}/S}(\mathrm{Ét})(T) \rightarrow 0$$

ce qui montre que  $i_2 \circ i_1 : P_{\mathcal{X}/S} \rightarrow \mathrm{Pic}_{\mathcal{X}/S}(\mathrm{Ét})$  est un isomorphisme, et donc  $i_2$  et  $i_1$  sont aussi des isomorphismes.

Si  $f$  a une section localement pour la topologie de Zariski, montrons que

$$\mathrm{Pic}_{\mathcal{X}/S}(\mathrm{Zar}) \xhookrightarrow{i_2} \mathrm{Pic}_{\mathcal{X}/S}(\mathrm{Ét})$$

est un isomorphisme. Comme il s'agit d'un morphisme entre deux faisceaux pour la topologie de Zariski, la question est locale pour cette topologie et l'on peut supposer que  $f$  a une section, ce qui nous ramène au cas précédent.

Il nous reste à montrer que  $\mathrm{Pic}_{\mathcal{X}/S}(\mathrm{\acute{E}t}) \rightarrow \mathrm{Pic}_{\mathcal{X}/S}(\mathrm{fppf})$  est un isomorphisme. On a un diagramme commutatif dans lequel les lignes sont les suites exactes de bas degré associées aux suites spectrales de Leray pour la cohomologie lisse-étale et pour la cohomologie  $fppf$  :

$$\begin{array}{ccccccccc} H^1(T, \mathbb{G}_m) & \longrightarrow & H^1(\mathcal{X}_T, \mathbb{G}_m) & \rightarrow & H^0(T, R^1 f_{T*} \mathbb{G}_m) & \rightarrow & H^2(T, \mathbb{G}_m) & \longrightarrow & H^2(\mathcal{X}_T, \mathbb{G}_m) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H_{\mathrm{pl}}^1(T, \mathbb{G}_m) & \longrightarrow & H_{\mathrm{pl}}^1(\mathcal{X}_T, \mathbb{G}_m) & \rightarrow & H_{\mathrm{pl}}^0(T, R^1 f_{T*}^{\mathrm{pl}} \mathbb{G}_m) & \rightarrow & H_{\mathrm{pl}}^2(T, \mathbb{G}_m) & \longrightarrow & H_{\mathrm{pl}}^2(\mathcal{X}_T, \mathbb{G}_m). \end{array}$$

Le diagramme ci-dessus tient compte du fait que, par platitude cohomologique,  $f_{T*} \mathbb{G}_m = \mathbb{G}_m$  et  $f_{T*}^{\mathrm{pl}} \mathbb{G}_m = \mathbb{G}_m$ . Comme  $\mathbb{G}_m$  est un groupe lisse sur la base, le théorème (A.2.2.5) nous dit que les deux flèches verticales de gauche et les deux flèches verticales de droite sont des isomorphismes. D'après le lemme des 5, celle du milieu en est un aussi. Or d'après (1.2.1.6) cette flèche est précisément le morphisme  $\mathrm{Pic}_{\mathcal{X}/S}(\mathrm{\acute{E}t})(T) \rightarrow \mathrm{Pic}_{\mathcal{X}/S}(\mathrm{fppf})(T)$ .  $\square$

**Remarque 1.2.3.2** On peut démontrer que le morphisme  $\mathrm{Pic}_{\mathcal{X}/S}(\mathrm{\acute{E}t}) \rightarrow \mathrm{Pic}_{\mathcal{X}/S}(\mathrm{fppf})$  est injectif d'une manière plus directe, sans utiliser la cohomologie  $fppf$ . Voici comment. On note  $P$  le foncteur  $\mathrm{Pic}_{\mathcal{X}/S}(\mathrm{\acute{E}t})$ . Il faut montrer que si  $(U_i \rightarrow U)$  est une famille couvrante pour la topologie  $(fppf)$ , alors le morphisme  $P(U) \rightarrow \prod_i P(U_i)$  est injectif, autrement dit que  $P$  est un préfaisceau séparé pour la topologie  $(fppf)$ . Vu que  $P$  est un faisceau pour la topologie de Zariski, il suffit clairement de traiter le cas d'une famille couvrante à un élément  $(U' \rightarrow U)$ .

Soit  $s$  un élément de  $P(U)$  dont l'image dans  $P(U')$  est nulle. Considérons dans un premier temps le cas où  $s$  provient de  $P_{\mathcal{X}/S}(U)$ . Il existe alors un faisceau inversible  $\mathcal{L}$  sur  $\mathcal{X} \times_S U$  dont la classe dans  $P_{\mathcal{X}/S}(U)$  est égale à  $s$ . Avec les notations du diagramme ci-dessous,

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X} \times_S U' & \xrightarrow{v} & \mathcal{X} \times_S U \\ f_{U'} \downarrow & \square & \downarrow f_U \\ U' & \xrightarrow{u} & U \end{array}$$

dire que l'image de  $s$  dans  $P(U')$  est nulle signifie que  $v^*(\mathcal{L})$  provient de la base, autrement dit d'après le critère (1.2.2.7), que le morphisme d'adjonction  $a_{\mathcal{L}_{U'}} : f_{U'}^* f_{U*} \mathcal{L}_{U'} \rightarrow \mathcal{L}_{U'}$  est un isomorphisme. Or on a montré au cours de la démonstration de ce critère que la formation du morphisme d'adjonction  $a_{\mathcal{L}}$  commute au changement de base plat. On en déduit donc que le morphisme

$$v^* a_{\mathcal{L}_U} : v^* f_U^* f_{U*} \mathcal{L}_U \rightarrow v^* \mathcal{L}_U$$

est lui aussi un isomorphisme. Maintenant, comme  $v$  est fidèlement plat et localement de présentation finie, il résulte de la théorie de la descente fidèlement plate des modules quasi-cohérents (cf. [38] (13.5)) que  $a_{\mathcal{L}_U}$  est un isomorphisme, ce qui signifie en vertu du critère (1.2.2.7) que  $s = 0$ . Dans le cas général, il existe une famille couvrante étale  $(V \rightarrow U)$  telle que  $s|_V$  provienne de  $P_{\mathcal{X}/S}(V)$ . Alors, en notant  $V' = V \times_U U'$  on voit que  $(s|_V)|_{V'} = (s|_{U'})|_{V'} = 0$  ce qui implique la nullité de  $s|_V$  d'après le premier cas puisque



$(V' \rightarrow V)$  est une famille couvrante (*fppf*), et donc celle de  $s$  puisque  $V \rightarrow U$  est une famille couvrante étale.

Par la suite, lorsque nous parlerons du foncteur de Picard, il s'agira de  $\text{Pic}_{\mathcal{X}/S}(\text{fppf})$ . Nous le noterons simplement  $\text{Pic}_{\mathcal{X}/S}$ .

### 1.3 Le champ de Picard d'un champ algébrique

Avec l'apparition des champs, un nouvel objet « classifiant » pour les faisceaux inversibles vient s'ajouter aux cinq foncteurs précédents : le champ de Picard. La proposition (1.3.7) et le corollaire (1.3.10) montrent que dans le cas cohomologiquement plat, les questions de l'algébricité du champ de Picard et de la représentabilité du foncteur de Picard sont essentiellement équivalentes.

**Définition 1.3.1** Soit  $\mathcal{X}$  un  $S$ -champ. On appelle champ de Picard de  $\mathcal{X}$ , et on note  $\mathcal{P}\text{ic}(\mathcal{X}/S)$  le champ des faisceaux inversibles. Pour tout  $U \in \text{ob}(\text{Aff}/S)$ , la catégorie  $\mathcal{P}\text{ic}(\mathcal{X}/S)_U$  est donc la catégorie dont les objets sont les faisceaux inversibles sur  $\mathcal{X} \times_S U$  et dont les flèches sont les isomorphismes de faisceaux inversibles. Les changements de base sont définis de manière évidente.

**Remarque 1.3.2** Il résulte aisément de (1.1.1.6) que le  $S$ -groupeïde  $\mathcal{P}\text{ic}(\mathcal{X}/S)$  défini ci-dessus est bien un  $S$ -champ.

**Remarque 1.3.3** La terminologie adoptée ici, qui semble s'imposer naturellement, entre presque en conflit avec celle de [38] (14.4.2), où l'on appelle « champ de Picard » un champ muni d'un morphisme d'addition qui en fait une sorte de « champ en groupes ». Heureusement, si  $\mathcal{X}$  est un  $S$ -champ, le champ de Picard de  $\mathcal{X}$  défini ci-dessus est bien un champ de Picard au sens de [38] (14.4.2), le 1-morphisme d'addition

$$+ : \mathcal{P}\text{ic}(\mathcal{X}/S) \times_S \mathcal{P}\text{ic}(\mathcal{X}/S) \rightarrow \mathcal{P}\text{ic}(\mathcal{X}/S)$$

étant donné par le produit tensoriel de faisceaux inversibles.

**Remarque 1.3.4** Il est clair que la formation de  $\mathcal{P}\text{ic}(\mathcal{X}/S)$  commute au changement de base. Autrement dit, si  $S' \rightarrow S$  est un morphisme de schémas, le champ  $\mathcal{P}\text{ic}(\mathcal{X} \times_S S'/S')$  sur  $(\text{Aff}/S')$  est canoniquement isomorphe au  $S'$ -champ  $\mathcal{P}\text{ic}(\mathcal{X}/S) \times_S S'$ .

**Remarque 1.3.5** En notant  $\mathcal{H}\text{om}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$  le  $S$ -champ dont la fibre en  $U$  est la catégorie  $\text{Hom}(\mathcal{X} \times_S U, \mathcal{Y} \times_S U)$ , la proposition (1.1.1.7) montre que  $\mathcal{P}\text{ic}(\mathcal{X}/S)$  est isomorphe à  $\mathcal{H}\text{om}(\mathcal{X}, \text{BG}_m)$ .

Le champ  $\mathcal{P}\text{ic}(\mathcal{X}/S)$  est muni d'un morphisme naturel vers le  $S$ -groupeïde associé au préfaisceau  $\text{Pic}_{\mathcal{X}}$ , défini sur  $\mathcal{P}\text{ic}(\mathcal{X}/S)_U$  par le foncteur qui envoie un faisceau inversible sur sa classe d'isomorphie dans  $\text{Pic}_{\mathcal{X}}(U)$ . On en déduit par composition un morphisme naturel vers le  $S$ -espace  $P$  (où  $P$  désigne  $\text{Pic}_{\mathcal{X}/S}(\text{Ét})$  ou  $\text{Pic}_{\mathcal{X}/S}(\text{fppf})$  selon l'envie) :

$$\mathcal{P}\text{ic}(\mathcal{X}/S) \xrightarrow{\pi} P.$$

**Proposition 1.3.6** Le morphisme de  $S$ -champs  $\pi$  ci-dessus est une gerbe (resp. une gerbe (*fppf*)), autrement dit  $\pi$  et le morphisme diagonal

$$\Delta : \mathcal{P}\text{ic}(\mathcal{X}/S) \rightarrow \mathcal{P}\text{ic}(\mathcal{X}/S) \times_P \mathcal{P}\text{ic}(\mathcal{X}/S)$$

sont des épimorphismes.

**Démonstration.** Soient  $U \in \text{ob}(\text{Aff}/S)$  et  $x \in P(U)$ . Le  $S$ -espace  $P$  étant le faisceau étale (resp.  $(fppf)$ ) associé à  $\text{Pic}_{\mathcal{X}}$ , il existe une famille couvrante dans  $(\text{Aff}/S)$ , que l'on peut supposer réduite à un élément  $(U' \rightarrow U)$ , et un élément  $l \in \text{Pic}_{\mathcal{X}}(U')$ , tels que l'image de  $l$  dans  $P(U')$  soit égale à  $x|_{U'}$ . En d'autres termes il existe un faisceau inversible  $\mathcal{L}$  dans  $\mathcal{P}ic(\mathcal{X}/S)_{U'}$  dont l'image dans  $P(U')$  est  $x|_{U'}$ , ce qui montre que  $\pi$  est un épimorphisme.

Par ailleurs, si  $U$  est un objet de  $(\text{Aff}/S)$  et si  $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2 \in \mathcal{P}ic(\mathcal{X}/S)_U$  sont tels que  $\pi(\mathcal{L}_1) = \pi(\mathcal{L}_2)$ , alors il existe une famille couvrante à un élément telle que les images de  $\mathcal{L}_1|_{U'}$  et  $\mathcal{L}_2|_{U'}$  dans  $\text{Pic}_{\mathcal{X}}(U')$  soient égales, c'est-à-dire telle que  $\mathcal{L}_1|_{U'}$  et  $\mathcal{L}_2|_{U'}$  soient isomorphes, ce qui montre que  $\Delta$  est un épimorphisme.  $\square$

**Proposition 1.3.7** *Si  $\mathcal{P}ic(\mathcal{X}/S)$  est un champ algébrique (resp. préalgébrique), et si  $f$  est cohomologiquement plat en dimension zéro, alors  $\text{Pic}_{\mathcal{X}/S}$  est représentable par un  $S$ -espace algébrique (resp. préalgébrique), et le 1-morphisme  $\pi : \mathcal{P}ic(\mathcal{X}/S) \rightarrow \text{Pic}_{\mathcal{X}/S}$  est fidèlement plat et localement de présentation finie.*

**Démonstration.** D'après le corollaire (10.8) de [38], il suffit de vérifier que pour tout  $U \in \text{ob}(\text{Aff}/S)$  et pour tout faisceau inversible  $\mathcal{L}$  sur  $\mathcal{X} \times_S U$ , le  $U$ -espace algébrique en groupes  $\mathcal{I}som(\mathcal{L}, \mathcal{L})$  est plat et localement de présentation finie. Or  $\mathcal{I}som(\mathcal{L}, \mathcal{L})$  est le faisceau qui à tout  $V \in \text{ob}(\text{Aff}/U)$  associe  $\text{Aut}(\mathcal{L}_V)$ , et  $\text{Aut}(\mathcal{L}_V)$  s'identifie canoniquement à  $\Gamma(\mathcal{X} \times_S V, \mathcal{O}_{\mathcal{X} \times_S V})^\times$ . Mais par platitude cohomologique en dimension zéro, on a

$$\Gamma(\mathcal{X} \times_S V, \mathcal{O}_{\mathcal{X} \times_S V})^\times = \Gamma(V, \mathcal{O}_V)^\times = \mathbb{G}_m(V).$$

Finalement  $\mathcal{I}som(\mathcal{L}, \mathcal{L})$  est isomorphe à  $\mathbb{G}_m$ , donc il est lisse et de présentation finie.  $\square$

Réciproquement, on peut essayer de déduire l'algébricité du champ de Picard à partir de celle du foncteur de Picard. Voyons comment. Le champ des faisceaux inversibles sur  $S$ , c'est-à-dire le champ dont la catégorie fibre au-dessus d'un  $S$ -schéma  $U$  est la catégorie des faisceaux inversibles sur  $U$ , s'identifie naturellement au champ  $\text{BG}_m$  sur  $S$ . Le foncteur « image inverse par  $f$  » induit donc un morphisme de  $S$ -champs algébriques

$$\text{BG}_m \xrightarrow{f^*} \mathcal{P}ic(\mathcal{X}/S).$$

De plus ce morphisme est un monomorphisme (i.e. les foncteurs  $f_U^*$  sont pleinement fidèles) dès que  $f$  est cohomologiquement plat en dimension zéro. On a donc dans ce cas une « suite exacte » de champs de Picard :

$$0 \longrightarrow \text{BG}_m \xrightarrow{f^*} \mathcal{P}ic(\mathcal{X}/S) \xrightarrow{\pi} \text{Pic}_{\mathcal{X}/S} \longrightarrow 0.$$

Autrement dit  $f^*$  est un monomorphisme,  $\pi$  est un épimorphisme, un objet de  $\mathcal{P}ic(\mathcal{X}/S)$  est envoyé sur 0 par  $\pi$  si et seulement s'il provient de  $\text{BG}_m$ , et tous les morphismes sont compatibles aux morphismes d'addition des champs de Picard considérés<sup>4</sup>. La proposition ci-dessous nous permet de déterminer quand cette suite exacte est scindée.

**Proposition 1.3.8** *Soit  $\mathcal{X}$  un  $S$ -champ algébrique dont le morphisme structural  $f$  est cohomologiquement plat en dimension zéro.*

4. Si  $f$  n'est pas cohomologiquement plat en dimension zéro,  $f^*$  n'est plus un monomorphisme, mais le reste est presque vrai : il faut juste remplacer « provient » par « provient localement pour la topologie étale ».

- (i) Les propositions suivantes sont équivalentes :
- a) La suite exacte ci-dessus est scindée, autrement dit il existe un morphisme  $s$  de  $\text{Pic}_{\mathcal{X}/S}$  dans  $\mathcal{P}\text{ic}(\mathcal{X}/S)$  tel que  $\pi \circ s$  soit égal à l'identité.
  - b) Il existe un isomorphisme

$$\text{BG}_m \times_S \text{Pic}_{\mathcal{X}/S} \xrightarrow{\sim} \mathcal{P}\text{ic}(\mathcal{X}/S)$$

compatible avec les projections  $\text{pr}_2$  et  $\pi$  sur  $\text{Pic}_{\mathcal{X}/S}$ .

- c) Il existe sur le  $S$ -champ (non nécessairement algébrique)  $\mathcal{X} \times_S \text{Pic}_{\mathcal{X}/S}$  un faisceau inversible « universel »  $\mathcal{P}$  qui représente le foncteur  $\text{Pic}_{\mathcal{X}/S}$ , i.e. tel que pour tout  $U \in \text{ob}(\text{Aff}/S)$  et tout élément  $l$  de  $\text{Pic}_{\mathcal{X}/S}(U)$  on ait  $l = [\mathcal{P}|_{\mathcal{X} \times_S U}] = \pi(\mathcal{P}|_{\mathcal{X} \times_S U})$ .

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{X} \times_S U & \longrightarrow & \mathcal{X} \times_S \text{Pic}_{\mathcal{X}/S} & \longrightarrow & \mathcal{X} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ U & \xrightarrow{l} & \text{Pic}_{\mathcal{X}/S} & \longrightarrow & S \end{array}$$

- (ii) Les propositions suivantes sont équivalentes :
- d) Le morphisme naturel de  $P_{\mathcal{X}/S}$  dans  $\text{Pic}_{\mathcal{X}/S}$  est un isomorphisme.
  - e) Il existe un élément de  $P_{\mathcal{X}/S}(\text{Pic}_{\mathcal{X}/S})$  (c'est-à-dire  $\text{Hom}(\text{Pic}_{\mathcal{X}/S}, P_{\mathcal{X}/S})$  lorsque  $\text{Pic}_{\mathcal{X}/S}$  n'est pas représentable) qui a pour image l'identité dans  $\text{Pic}_{\mathcal{X}/S}(\text{Pic}_{\mathcal{X}/S})$  (ou, ce qui revient au même,  $P_{\mathcal{X}/S} \rightarrow \text{Pic}_{\mathcal{X}/S}$  a une section).
- (iii) Les conditions de (i) impliquent celles de (ii), et la réciproque est vraie si  $\text{Pic}_{\mathcal{X}/S}$  est représentable par un schéma. Toutes ces conditions sont vérifiées si le morphisme structural  $\mathcal{X} \rightarrow S$  a une section.

**Démonstration.** Montrons que a) implique b). On suppose que  $\pi$  a une section  $s$ . On vérifie alors facilement que le morphisme composé

$$\text{BG}_m \times_S \text{Pic}_{\mathcal{X}/S} \xrightarrow{(f^*, s)} \mathcal{P}\text{ic}(\mathcal{X}/S) \times_S \mathcal{P}\text{ic}(\mathcal{X}/S) \xrightarrow{\otimes} \mathcal{P}\text{ic}(\mathcal{X}/S)$$

est un isomorphisme. (On utilise ici la platitude cohomologique en dimension zéro.) Un quasi-inverse est donné par le foncteur de  $\mathcal{P}\text{ic}(\mathcal{X}/S)$  vers  $\text{BG}_m \times_S \text{Pic}_{\mathcal{X}/S}$  qui à un faisceau inversible  $\mathcal{M}$  associe le couple  $(\mathcal{M} \otimes s(\pi(\mathcal{M}))^{-1}, \pi(\mathcal{M}))$ , en identifiant  $\text{BG}_m$  à son image essentielle dans  $\mathcal{P}\text{ic}(\mathcal{X}/S)$ .

La réciproque est claire : un isomorphisme comme dans b) induit une section de  $\pi$  par composition avec la section évidente de  $\text{pr}_2$ .

Montrons maintenant que a) implique c)<sup>5</sup>. On se donne une section  $s$  de  $\pi$  et l'on va construire un faisceau inversible  $\mathcal{P}$  (au sens de (1.1.1.1)) sur le champ  $\mathcal{X} \times_S \text{Pic}_{\mathcal{X}/S}$ . Il faut donc construire pour tout  $S$ -schéma affine  $U$  et tout objet  $x$  de  $(\mathcal{X} \times_S \text{Pic}_{\mathcal{X}/S})_U$  un faisceau inversible  $\mathcal{P}(x)$  sur  $U$ , et des isomorphismes de transition entre les  $\mathcal{P}(x)$ . Soit  $x$  un objet de  $(\mathcal{X} \times_S \text{Pic}_{\mathcal{X}/S})_U$ . On note  $l = f_P \circ x$  et  $t_x$  la section de  $f_U$  induite par  $x$ , comme dans le diagramme ci-dessous.

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{X} \times_S U & \longrightarrow & \mathcal{X} \times_S \text{Pic}_{\mathcal{X}/S} & \longrightarrow & \mathcal{X} \\ \downarrow f_U & \nearrow x & \downarrow f_P & & \downarrow f \\ U & \xrightarrow{l} & \text{Pic}_{\mathcal{X}/S} & \longrightarrow & S \end{array}$$

5. C'est évident si  $\text{Pic}_{\mathcal{X}/S}$  est représentable par un schéma ! Ce que l'on ne suppose pas ici...

On a un faisceau inversible  $s(l)$  sur  $\mathcal{X} \times_S U$ . On pose  $\mathcal{P}(x) = t_x^* s(l)$ . Les isomorphismes de transition sont définis de manière évidente et l'on obtient ainsi un faisceau inversible  $\mathcal{P}$  sur  $\mathcal{X} \times_S \text{Pic}_{\mathcal{X}/S}$  dont il ne reste plus qu'à montrer qu'il représente  $\text{Pic}_{\mathcal{X}/S}$ . Soit  $l$  un élément de  $\text{Pic}_{\mathcal{X}/S}(U)$ . Il faut montrer que  $l = \pi(\mathcal{P}|_{\mathcal{X} \times_S U})$ . Il est évident, vu la construction de  $\mathcal{P}$ , que  $\mathcal{P}|_{\mathcal{X} \times_S U}$  est isomorphe à  $s(l)$ . Comme  $s$  est une section de  $\pi$ , on a bien le résultat attendu.

Réciproquement on suppose donné un faisceau inversible universel  $\mathcal{P}$ . Alors le morphisme qui à  $l$  associe  $\mathcal{P}|_{\mathcal{X} \times_S U}$  définit une section de  $\pi$ .

a)  $\Rightarrow$  e) est évident puisque  $\pi$  se factorise par  $P_{\mathcal{X}/S}$ .

L'équivalence entre d) et e) est évidente puisque le morphisme en question est de toute manière injectif par (1.2.3.1).

Supposons que  $\text{Pic}_{\mathcal{X}/S}$  soit représentable par un schéma et montrons que e) implique c). Sous l'hypothèse e), il existe par définition du foncteur  $P_{\mathcal{X}/S}$  un faisceau inversible  $\mathcal{P}$  sur  $\mathcal{X} \times_S \text{Pic}_{\mathcal{X}/S}$  qui induit l'élément identité de  $\text{Pic}_{\mathcal{X}/S}(\text{Pic}_{\mathcal{X}/S})$ . Il est clair que  $\mathcal{P}$  est universel.

Enfin dans le cas où  $f$  a une section  $\sigma$ , montrons que la condition b) est vérifiée. Le morphisme  $f^*$  admet dans ce cas une rétraction  $\sigma^*$ .

$$0 \longrightarrow \text{BG}_m \xrightarrow{f^*} \mathcal{P}ic(\mathcal{X}/S) \xrightarrow{\pi} \text{Pic}_{\mathcal{X}/S} \longrightarrow 0.$$

$\swarrow \sigma^*$

On vérifie alors facilement que le 1-morphisme

$$(\sigma^*, \pi): \begin{cases} \mathcal{P}ic(\mathcal{X}/S) \longrightarrow \text{BG}_m \times_S \text{Pic}_{\mathcal{X}/S} \\ \mathcal{M} \longmapsto (\sigma^* \mathcal{M}, \pi(\mathcal{M})) \end{cases}$$

est un isomorphisme.  $\square$

**Remarque 1.3.9** On se donne à la fois une section  $\sigma$  de  $f$  et un faisceau inversible universel  $\mathcal{P}$  sur  $\mathcal{X} \times_S \text{Pic}_{\mathcal{X}/S}$  (on ne suppose pas  $\text{Pic}_{\mathcal{X}/S}$  représentable). Alors l'isomorphisme  $\text{BG}_m \times_S \text{Pic}_{\mathcal{X}/S} \rightarrow \mathcal{P}ic(\mathcal{X}/S)$  induit par  $\mathcal{P}$  est un quasi-inverse de  $(\sigma^*, \pi)$  si et seulement si  $\sigma^* \mathcal{P}$  est trivial. En particulier on obtient toujours un quasi-inverse en « rigidifiant »  $\mathcal{P}$  le long de  $\sigma$ , c'est-à-dire en remplaçant  $\mathcal{P}$  par  $\mathcal{P} \otimes (f^* \sigma^* \mathcal{P})^{-1}$ .

**Corollaire 1.3.10** Soit  $\mathcal{X}$  un  $S$ -champ algébrique dont le morphisme structural  $f$  est cohomologiquement plat en dimension zéro. On suppose que le foncteur de Picard  $\text{Pic}_{\mathcal{X}/S}$  est représentable par un espace algébrique et que  $f$  a une section localement pour la topologie fppf sur  $S$ . Alors le champ de Picard  $\mathcal{P}ic(\mathcal{X}/S)$  est algébrique.

**Démonstration.** Pour un  $S$ -champ, être algébrique est une condition locale pour la topologie fppf. On peut donc supposer que  $f$  a une section et il suffit d'appliquer la proposition précédente.  $\square$

## 1.4 Propriétés de finitude relative

Nous terminons cette première partie en montrant que le foncteur de Picard commute aux limites inductives (i.e. il est de présentation finie) et aux limites projectives. Ces deux propriétés nous seront utiles pour étudier sa représentabilité.

### 1.4.1 Présentation finie

**Proposition 1.4.1.1** *Soient  $S$  un schéma affine, et  $\mathcal{X}$  un  $S$ -champ algébrique quasi-compact. Alors le foncteur de Picard relatif  $P_{\mathcal{X}/S}$  défini ci-dessus est localement de présentation finie. Si de plus le morphisme structural  $f : \mathcal{X} \rightarrow S$  est cohomologiquement plat en dimension zéro et admet une section localement pour la topologie  $(fppf)$ , alors le foncteur de Picard relatif  $\text{Pic}_{\mathcal{X}/S}$  est localement de présentation finie.*

**Démonstration.** Il s'agit de montrer que  $P_{\mathcal{X}/S}$  commute aux limites inductives filtrantes d'anneaux. Autrement dit, on veut montrer que pour tout ensemble inductif filtrant  $I$ , et pour tout système inductif de  $S$ -anneaux  $(A_i)_{i \in I}$  indexé par  $I$ , le morphisme canonique

$$\varinjlim P_{\mathcal{X}/S}(A_i) \longrightarrow P_{\mathcal{X}/S}(A)$$

où  $A = \varinjlim A_i$  est la limite inductive des  $A_i$ , est un isomorphisme. Rappelons que pour tout  $S$ -schéma  $S'$ , on a  $P_{\mathcal{X}/S}(S') = \frac{\text{Pic}(\mathcal{X} \times_S S')}{\text{Pic}(S')}$ . Le foncteur  $\varinjlim$  étant exact, il suffit donc de montrer que  $\text{Pic}_{\mathcal{X}}$  lui-même est localement de présentation finie. On peut décrire la catégorie  $\varinjlim \text{Inv}(\mathcal{X} \otimes_S A_i)$  de la manière suivante. Les objets sont les couples  $(i, \mathcal{L}_i)$  où  $i \in I$  et  $\mathcal{L}_i$  est un faisceau inversible sur  $\mathcal{X} \otimes_S A_i$ . Pour deux tels objets  $(i, \mathcal{L}_i)$  et  $(j, \mathcal{L}_j)$ ,  $\text{Hom}((i, \mathcal{L}_i), (j, \mathcal{L}_j))$  est  $\varinjlim \text{Hom}((\mathcal{L}_i)_{|(\mathcal{X} \otimes_S A_l)}, (\mathcal{L}_j)_{|(\mathcal{X} \otimes_S A_l)})$  où la limite inductive est prise sur l'ensemble (non vide) des indices  $l$  qui majorent  $i$  et  $j$ . Pour montrer que  $\text{Pic}_{\mathcal{X}}$  est localement de présentation finie, il suffit de montrer que le foncteur naturel

$$\varinjlim \text{Inv}(\mathcal{X} \otimes_S A_i) \longrightarrow \text{Inv}(\mathcal{X} \otimes_S A)$$

est une équivalence de catégories. Ceci résulte de la proposition (4.18) de [38], compte tenu de (1.1.1.7) et du fait que le champ  $\text{BG}_m$  est localement de présentation finie.

Supposons maintenant que  $f : \mathcal{X} \rightarrow S$  est cohomologiquement plat en dimension zéro et a une section localement pour la topologie  $(fppf)$ . Dans le cas où  $f$  a une section, on sait d'après (1.2.3.1) que  $\text{Pic}_{\mathcal{X}/S}$  s'identifie à  $P_{\mathcal{X}/S}$ , dont on vient de montrer qu'il est localement de présentation finie. Soit  $S' \rightarrow S$  un morphisme fidèlement plat et localement de présentation finie, tel que le morphisme  $f' : \mathcal{X} \times_S S' \rightarrow S'$  obtenu par changement de base ait une section. Comme la formation de  $\text{Pic}_{\mathcal{X}/S}$  commute au changement de base, on en déduit que le foncteur  $\text{Pic}_{\mathcal{X}/S} \times_S S'$  est localement de présentation finie, ce qui montre, en utilisant le fait que  $\text{Pic}_{\mathcal{X}/S}$  est un faisceau pour la topologie  $(fppf)$  et l'exactitude du foncteur  $\varinjlim$ , que  $\text{Pic}_{\mathcal{X}/S}$  lui-même est localement de présentation finie.  $\square$

**Remarque 1.4.1.2** L'hypothèse de quasi-compactité sur  $\mathcal{X}$  est réellement nécessaire, même lorsque  $\mathcal{X}$  est un schéma, comme le montre l'exemple suivant. Soit  $E$  une courbe elliptique sur  $\mathbb{Q}$ . On prend  $\mathcal{X} = \coprod_{n \in \mathbb{N}} E_n$ , où pour tout  $n$ ,  $E_n = E$ . Alors on a  $\text{Pic}_{E/\mathbb{Q}}^0 \simeq E$ , donc  $\text{Pic}_{\mathcal{X}/\mathbb{Q}}^0 \simeq E^{\mathbb{N}}$ . En particulier pour toute extension  $L$  de  $\mathbb{Q}$  on a  $\text{Pic}_{\mathcal{X}/\mathbb{Q}}^0(L) = (E(L))^{\mathbb{N}}$ . On peut voir que le schéma de Picard ainsi obtenu n'est pas localement de présentation finie en regardant par exemple les points à valeurs dans  $\overline{\mathbb{Q}} = \varinjlim K$ , où la limite inductive est prise sur l'ensemble des corps de nombres  $K$  sur  $\mathbb{Q}$ . La flèche canonique  $\varinjlim \text{Pic}_{\mathcal{X}/\mathbb{Q}}^0(K) \rightarrow \text{Pic}_{\mathcal{X}/\mathbb{Q}}^0(\overline{\mathbb{Q}})$  s'identifie à :

$$\varinjlim E(K)^{\mathbb{N}} \longrightarrow E(\overline{\mathbb{Q}})^{\mathbb{N}}.$$

Cette application n'est clairement pas bijective puisque  $E$  a des  $K$ -points pour des corps de nombres  $K$  de degré aussi grand que l'on veut.

### 1.4.2 Commutation aux limites projectives

**Proposition 1.4.2.1** *Soit  $\mathcal{X}$  un  $S$ -champ algébrique propre et cohomologiquement plat en dimension zéro. Soient  $\bar{A}$  un anneau noethérien local complet sur  $S$  et  $\mathfrak{m}$  son idéal maximal. Alors le morphisme canonique*

$$P_{\mathcal{X}/S}(\bar{A}) \longrightarrow \varprojlim P_{\mathcal{X}/S}(\bar{A}/\mathfrak{m}^n)$$

*est un isomorphisme.*

**Démonstration.** On peut supposer  $S = \operatorname{Spec} \bar{A}$ . On note  $S_n = \operatorname{Spec}(\bar{A}/\mathfrak{m}^{n+1})$ , et  $\mathcal{X}_n = \mathcal{X} \times_S S_n$ .

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{X}_0 & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & \mathcal{X}_n & \longrightarrow & \mathcal{X}_{n+1} \longrightarrow \dots \longrightarrow \mathcal{X} \\ \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow \\ S_0 & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & S_n & \longrightarrow & S_{n+1} \longrightarrow \dots \longrightarrow S \end{array}$$

Comme  $S$  et tous les  $S_n$  ont des groupes de Picard triviaux, nous avons à montrer que

$$\operatorname{Pic}(\mathcal{X}) \longrightarrow \varprojlim \operatorname{Pic}(\mathcal{X}_n)$$

est un isomorphisme.

*Injectivité :* Soient  $\mathcal{L}$  un faisceau inversible sur  $\mathcal{X}$ , et  $\mathcal{L}_n$  les faisceaux induits par  $\mathcal{L}$  sur les  $\mathcal{X}_n$ . On suppose que  $\mathcal{L}$  est trivial sur chacun des  $\mathcal{X}_n$  et on veut montrer qu'il est trivial. D'après le théorème (1.4) de [45], on a une équivalence de catégories

$$\begin{array}{c} (\text{faisceaux cohérents sur } \mathcal{X}) \\ \downarrow \\ (\text{familles compatibles de faisceaux cohérents sur les } \mathcal{X}_n). \end{array}$$

Cette équivalence de catégories induit un foncteur pleinement fidèle :

$$\begin{array}{c} (\text{faisceaux inversibles sur } \mathcal{X}) \\ \downarrow \\ (\text{familles compatibles de faisceaux inversibles sur les } \mathcal{X}_n). \end{array}$$

Il suffit donc de montrer que la famille compatible de faisceaux inversibles  $(\mathcal{L}_n)_{n \geq 0}$  est isomorphe à la famille triviale, autrement dit que l'on a une famille compatible d'isomorphismes  $\mathcal{O}_{\mathcal{X}_n} \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}_n$ . Par hypothèse on sait que pour tout  $n$  il existe un tel isomorphisme, mais la famille ainsi obtenue n'est *a priori* pas compatible au changement de base. Deux isomorphismes  $\mathcal{O}_{\mathcal{X}_n} \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}_n$  diffèrent par un automorphisme de  $\mathcal{O}_{\mathcal{X}_n}$ , donc pour conclure il suffit de montrer que

$$\operatorname{Aut}(\mathcal{O}_{\mathcal{X}_n}) \longrightarrow \operatorname{Aut}(\mathcal{O}_{\mathcal{X}_{n-1}})$$

est surjective. Or par platitude cohomologique,  $\operatorname{Aut}(\mathcal{O}_{\mathcal{X}_n}) = \Gamma(\mathcal{X}_n, \mathcal{O}_{\mathcal{X}_n})^\times$  n'est autre que  $(\bar{A}/\mathfrak{m}^{n+1})^\times$ , et le morphisme  $(\bar{A}/\mathfrak{m}^{n+1})^\times \longrightarrow (\bar{A}/\mathfrak{m}^n)^\times$  est clairement surjectif.

*Surjectivité :* Soit  $(\mathcal{L}_n)_{n \geq 0}$  une famille compatible de faisceaux inversibles sur les  $\mathcal{X}_n$ . Il nous faut montrer qu'il existe un faisceau inversible sur  $\mathcal{X}$ , qui induit, à isomorphisme près, la famille  $(\mathcal{L}_n)_{n \geq 0}$ . Il existe en vertu de l'équivalence de catégories mentionnée ci-dessus un faisceau quasi-cohérent  $\mathcal{L}$  sur  $\mathcal{X}$  ayant cette propriété, et il suffit de montrer que  $\mathcal{L}$  est un faisceau inversible. On construit un inverse en considérant un faisceau cohérent  $\mathcal{M}$  qui induit la famille compatible  $(\mathcal{L}_n^{-1})_{n \geq 0}$ . Pour montrer que  $\mathcal{M} \otimes \mathcal{L}$  est isomorphe à  $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$  il suffit de montrer que la famille induite par  $\mathcal{M} \otimes \mathcal{L}$  est isomorphe à la famille triviale. Mais ceci est évident puisque que l'on obtient un système compatible d'isomorphismes en prenant pour tout  $n$  l'isomorphisme :

$$(\mathcal{M} \otimes \mathcal{L})|_{\mathcal{X}_n} \simeq (\mathcal{M}|_{\mathcal{X}_n}) \otimes (\mathcal{L}|_{\mathcal{X}_n}) \simeq \mathcal{L}_n^{-1} \otimes \mathcal{L}_n \simeq \mathcal{O}_{\mathcal{X}_n}.$$

□

## Chapitre 2

# Propriétés de séparation

### 2.1 Préliminaires

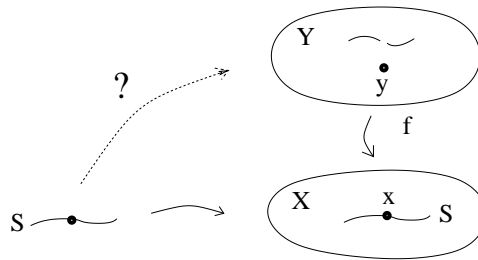
#### 2.1.1 Critère valuatif de locale séparation d'Artin

Artin a caché dans les méandres techniques de son théorème de représentabilité pour les espaces algébriques un très joli critère valuatif permettant de caractériser les immersions quasi-compactes de schémas<sup>1</sup> (cf. [12] pp. 58-59). Nous nous proposons d'en donner ci-dessous un énoncé précis assorti d'une démonstration autonome (thm. 2.1.1.2). Au passage, nous le généralisons aux morphismes représentables de champs algébriques.

Si un morphisme  $f : Y \rightarrow X$  est une immersion, il doit vérifier la propriété suivante :

$$\forall y_0, y_1 \in Y, y_0 \in \overline{\{y_1\}} \iff f(y_0) \in \overline{\{f(y_1)\}} \quad (*)$$

En particulier, pour tout point  $y$  de  $Y$  d'image  $x$  dans  $X$  et tout plongement d'un petit morceau de courbe  $S$  passant par  $x$  dans  $X$ , le point  $y$  doit être dans l'adhérence de tout relèvement (unique, s'il existe!) de  $S \setminus \{x\}$  à  $Y$ .



Le lemme suivant dit essentiellement que cette dernière propriété est équivalente à la propriété (\*).

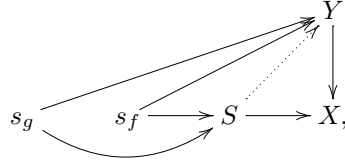
**Lemme 2.1.1.1** *Soit  $f : Y \rightarrow X$  un monomorphisme de schémas. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(1) *Le morphisme  $f$  vérifie (\*) universellement.*

1. ou plutôt, ce qui revient essentiellement au même, un critère de locale séparation pour les morphismes de schémas



- (1 bis) Le morphisme  $f$  vérifie (\*) après tout changement de base localement de type fini.
- (2) Soient  $A$  un anneau de valuation,  $k$  son corps résiduel,  $K$  son corps des fractions,  $S = \text{Spec } A$ ,  $s_g = \text{Spec } K$ ,  $s_f = \text{Spec } k$ , et  $S \rightarrow X$  un morphisme, tels que  $s_g$  et  $s_f$  se relèvent à  $Y$ . Alors  $S$  se relève à  $Y$ . En d'autres termes, tout diagramme commutatif en traits pleins :



se prolonge par un morphisme de  $S$  vers  $Y$  en un diagramme commutatif.

Si de plus  $X$  est localement noethérien, alors ces conditions sont encore équivalentes à :

- (2 bis) même condition que (2) mais en se restreignant à des anneaux de valuation discrète.

### Démonstration.

(1 bis)  $\implies$  (1) : Soit  $\varphi : X' \rightarrow X$  un morphisme de changement de base. On considère le carré cartésien :

$$\begin{array}{ccc}
 Y' & \xrightarrow{\varphi'} & Y \\
 f' \downarrow & \square & \downarrow f \\
 X' & \xrightarrow{\varphi} & X.
 \end{array}$$

Soient  $y'_0, y'_1 \in Y'$ . On note  $x'_0, x'_1$  (resp.  $y_0, y_1, x_0, x_1$ ) leurs images dans  $X'$  (resp.  $Y, X$ ). On suppose que  $x'_0 \in \overline{\{x'_1\}}$  et il faut montrer que  $y'_0 \in \overline{\{y'_1\}}$ . Soit  $U$  un ouvert affine de  $X$  contenant  $x_0$ . Il contient aussi  $x_1$ . En notant  $U' = \varphi^{-1}(U)$  et  $V' = f'^{-1}(U')$ , on voit qu'il suffit de montrer que  $f'_{|V'} : V' \rightarrow U'$  vérifie (\*). Or  $V' = Y \times_X U' = f^{-1}(U) \times_U U'$ . La condition (1 bis) étant clairement stable par changement de base par une immersion ouverte, on peut supposer  $X$  affine. De même, le fait qu'une immersion ouverte vérifie (1) (donc (1 bis)) montre que l'on peut supposer  $Y$  affine. Il est clair que l'on peut aussi supposer  $X'$  affine. On écrit  $Y = \text{Spec } B$ ,  $X = \text{Spec } A$ ,  $X' = \text{Spec } A'$  et  $\lambda : A' \rightarrow A' \otimes_A B$ . Soient  $\mathfrak{p}, \mathfrak{q} \in \text{Spec } (A' \otimes_A B)$  tels que  $\lambda^{-1}(\mathfrak{q}) \subset \lambda^{-1}(\mathfrak{p})$ . Il s'agit de montrer que  $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$ . Soit  $x = \sum_i a'_i \otimes b_i \in \mathfrak{q}$ . On note  $A''$  la sous- $A$ -algèbre de  $A'$  engendrée par les  $a'_i$ .

$$\begin{array}{ccccc}
 A' \otimes_A B & \xleftarrow{\gamma} & A'' \otimes_A B & \xleftarrow{\quad} & B \\
 \lambda \uparrow & & \uparrow \psi & & \uparrow \\
 A' & \xleftarrow{\quad} & A'' & \xleftarrow{\quad} & A
 \end{array}$$

Alors dans  $A'' \otimes_A B$ , l'élément  $y$  défini par  $\sum_i a'_i \otimes b_i$  appartient à  $\gamma^{-1}(\mathfrak{q})$ . Par ailleurs, comme  $A''$  est de type fini sur  $A$ , l'inclusion  $\psi^{-1}(\gamma^{-1}(\mathfrak{q})) \subset \psi^{-1}(\gamma^{-1}(\mathfrak{p}))$  implique

$$\gamma^{-1}(\mathfrak{q}) \subset \gamma^{-1}(\mathfrak{p}).$$

Donc  $x = \gamma(y) \in \mathfrak{p}$ .

(1)  $\implies$  (2) : Avec les notations ci-dessus, les données de la condition (2) induisent un diagramme

$$\begin{array}{ccccc} & & Y_S & \longrightarrow & Y \\ & \nearrow & \downarrow f_S & & \downarrow f \\ s_g & & S & \longrightarrow & X, \\ & \nwarrow & \uparrow s_f & & \end{array}$$

où  $Y_S = Y \times_S X$ . On note  $y_f, y_g$  les images de  $s_f, s_g$  dans  $Y_S$ , et  $Z = \overline{\{y_g\}}$  muni de sa structure de sous-schéma fermé réduit. On a  $f_S(y_f) = s_f$  et  $f_S(y_g) = s_g$ , donc la condition (1) implique que  $y_f \in Z$ . On note alors  $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{Z, y_f}$  l'anneau local de  $Z$  en  $y_f$ . Le morphisme  $\text{Spec } \mathcal{O} \rightarrow Z \rightarrow S$  correspond à un morphisme local d'anneaux locaux  $R \rightarrow \mathcal{O}$ , qui fait commuter le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} R & \longrightarrow & \mathcal{O} \\ \parallel & & \parallel \\ K & \longrightarrow & \kappa(y_g). \end{array}$$

Par ailleurs comme  $s_g$  se relève on a  $\kappa(y_g) = \kappa(s_g) = K$ . Donc  $\mathcal{O}$  est un anneau local qui domine  $R$  et par maximalité de  $R$  pour la relation de domination,  $R = \mathcal{O}$ , d'où un morphisme  $S \rightarrow \text{Spec } \mathcal{O} \rightarrow Z \subset Y_S \rightarrow Y$  qui a les propriétés escomptées.

(2)  $\implies$  (1) : La condition (2) est stable par changement de base donc on peut oublier l'adverbe de la condition (1). Soient  $y_0, y_1 \in Y$  tels que  $f(y_0) \in \overline{\{f(y_1)\}}$ . On note  $x_0 = f(y_0)$ ,  $x_1 = f(y_1)$ ,  $Z = \overline{\{x_1\}}$  muni de sa structure de sous-schéma fermé réduit, et  $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{Z, x_0}$  l'anneau local de  $Z$  en  $x_0$ .  $\mathcal{O} \subset \kappa(x_1) \subset \kappa(y_1) = K$  est un anneau local. Il existe un anneau de valuation  $R$  de  $K$  qui domine  $\mathcal{O}$ . Autrement dit on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O} & \xrightarrow{i} & R \\ \parallel & & \parallel \\ \kappa(x_1) & \hookrightarrow & K = \kappa(y_1) \end{array}$$

et  $i$  est un morphisme local d'anneaux locaux. D'où un morphisme de  $S = \text{Spec } R$  vers  $Z$  qui envoie le point générique  $s_g$  de  $S$  sur  $x_1$  et le point fermé  $s_f$  sur  $x_0$ . Comme  $K = \kappa(y_1)$ ,  $s_g$  se relève clairement en un morphisme  $s_g \rightarrow Y$  d'image  $y_1$ . Par ailleurs comme  $Y \rightarrow X$  est un monomorphisme, l'extension résiduelle  $\kappa(x_0) \rightarrow \kappa(y_0)$  est triviale de sorte que le point fermé se relève aussi. On obtient donc un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} & & & & Y \\ & \nearrow & & \nearrow & \downarrow \\ s_g & & S & \longrightarrow & Z \hookrightarrow X, \\ & \nwarrow & \uparrow s_f & & \end{array}$$

et la condition (2) nous donne un morphisme  $S \rightarrow Y$  qui envoie  $s_g$  sur  $y_1$  et  $s_f$  sur  $y_0$ , ce qui montre que  $y_0 \in \overline{\{y_1\}}$ .

(2 bis)  $\implies$  (1 bis) : Ici on suppose de plus que  $X$  est localement noethérien. Alors dans le raisonnement précédent  $\mathcal{O}$  est un anneau local intègre *noethérien* de corps des fractions

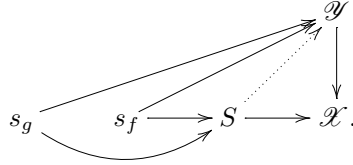
$\kappa(x_1)$ , et l'extension  $\kappa(x_1) \rightarrow K = \kappa(y_1)$  est triviale puisque  $f$  est un monomorphisme, donc l'anneau  $R$  peut être choisi de valuation discrète, et la suite du raisonnement est encore valable.  $\square$

Le théorème ci-dessous reprend les idées d'Artin présentes pp. 58-59 de [12].

**Théorème 2.1.1.2** *Soit  $f : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$  un morphisme représentable et localement de présentation finie de champs algébriques. On suppose de plus que  $\mathcal{X}$  est localement noethérien. Alors  $f$  est une immersion quasi-compacte si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :*

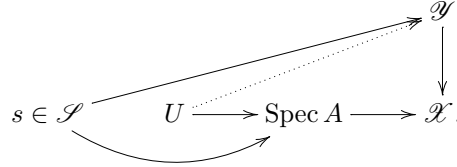
(a)  *$f$  est un monomorphisme.*

(b) *Soient  $A$  un anneau de valuation (resp. un anneau de valuation discrète),  $k$  son corps résiduel,  $K$  son corps des fractions,  $S = \text{Spec } A$ ,  $s_g = \text{Spec } K$ ,  $s_f = \text{Spec } k$ , et  $S \rightarrow \mathcal{X}$  un morphisme, tels que  $s_g$  et  $s_f$  se relèvent à  $\mathcal{Y}$ . Alors  $S$  se relève à  $\mathcal{Y}$ . Autrement dit, tout diagramme 2-commutatif en traits pleins :*



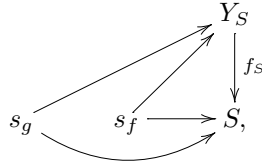
*se prolonge en un diagramme 2-commutatif par la flèche en pointillés.*

(c) *Soit  $A$  un anneau intègre. Pour tout morphisme  $\text{Spec } A \rightarrow \mathcal{X}$  tel qu'il existe un ensemble dense  $\mathcal{S}$  de points de  $\text{Spec } A$  qui se relèvent à  $\mathcal{Y}$ , il existe un ouvert non vide  $U$  de  $\text{Spec } A$  qui se relève à  $\mathcal{Y}$  :*



**Remarque 2.1.1.3** La démonstration ci-dessous montre aussi que si les conditions (a) et (c) sont vérifiées, alors  $f$  est un morphisme quasi-compact. Cependant, la condition (c) seule ne suffit pas pour assurer la quasi-compactité de  $f$ . En effet, elle est vérifiée par exemple dès que  $f$  a une section.

**Démonstration.** Supposons que  $f$  est une immersion quasi-compacte. Alors  $f$  est un monomorphisme, et il est de plus schématique. Avec les notations de (b), en posant  $Y_S = \mathcal{Y} \times_{\mathcal{X}} S$ , on a un diagramme commutatif



où  $f_S : Y_S \rightarrow S$  est une immersion quasi-compacte de schémas, et il s'agit de montrer que  $f_S$  a une section. D'après le lemme précédent, il suffit de montrer qu'une immersion quasi-compacte  $\varphi : U \rightarrow V$  vérifie la condition

$$\forall u_0, u_1 \in U \quad u_0 \in \overline{\{u_1\}} \iff \varphi(u_0) \in \overline{\{\varphi(u_1)\}},$$

ce qui résulte trivialement du fait qu'un tel morphisme induit un homéomorphisme sur une partie localement fermée. Montrons la condition (c). On se donne un schéma affine intègre  $S = \text{Spec } A$  et un morphisme  $S \rightarrow \mathcal{X}$  comme dans (c). En notant  $Y_S = \mathcal{Y} \times_{\mathcal{X}} S$ , le morphisme  $f_S : Y_S \rightarrow S$  est une immersion quasi-compacte de schémas, et par hypothèse son image contient un ensemble dense de  $S$ . Son image est donc un ouvert  $U$  de  $S$  et il se factorise en  $Y_S \rightarrow U \rightarrow S$  où  $U \rightarrow S$  est une immersion ouverte, et  $Y_S \rightarrow U$  une immersion fermée surjective. Mais comme  $U$  est réduit, cette dernière flèche est un isomorphisme. On obtient donc un morphisme  $U \rightarrow Y_S$  qui par composition avec  $Y_S \rightarrow \mathcal{Y}$  donne le relèvement souhaité.

Réciproquement, supposons les conditions (a), (b), et (c) satisfaites et montrons que  $\mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$  est une immersion quasi-compacte. Comme  $f$  est un monomorphisme localement de présentation finie, il est séparé et localement quasi-fini, donc il est schématique d'après [38], (A.2). En vertu de [29] (2.7.1), il suffit de montrer le résultat après changement de base par une présentation lisse  $X \rightarrow \mathcal{X}$  de  $\mathcal{X}$ . On choisit une présentation par un schéma  $X$  (localement noethérien). Alors  $Y = \mathcal{Y} \times_{\mathcal{X}} X$  est lui aussi un schéma, et le morphisme  $Y \rightarrow X$  obtenu par changement de base vérifie les mêmes hypothèses que  $f$  (il sera encore noté  $f$  par la suite). Être une immersion quasi-compacte est une propriété locale à la base, donc on peut supposer que  $X$  est un schéma affine (noethérien).

• *Quasi-compactité de  $Y$ .*

Pour montrer que  $Y$  est quasi-compact, nous allons montrer par récurrence noethérienne que pour tout fermé  $F$  de  $X$ ,  $f^{-1}(F)$  est un espace topologique noethérien. Il faut montrer que si  $A$  est un fermé de  $X$  tel que pour tout fermé strict  $B$  de  $A$ ,  $f^{-1}(B)$  soit noethérien, alors  $f^{-1}(A)$  est noethérien. Or le morphisme  $f^{-1}(A) \rightarrow A$  obtenu par changement de base vérifie les mêmes hypothèses que  $Y \rightarrow X$  (les conditions (a), (b), et (c) sont stables par changement de base). Donc quitte à remplacer  $X$  par  $A$  on peut supposer que l'image réciproque de tout fermé strict de  $X$  est noethérienne et il s'agit de montrer que  $Y$  est quasi-compact. C'est clair si  $X$  est réductible, ou si  $f(Y)$  n'est pas dense, donc on peut supposer  $X$  irréductible et  $f$  dominant. On peut supposer  $Y$  réduit, puisque la question est purement topologique, et les schémas qui entrent en jeu dans les conditions (b) et (c) sont tous réduits. Alors  $f$  se factorise par  $X_{\text{réd}}$ , et le morphisme  $Y \rightarrow X_{\text{réd}}$  ainsi obtenu vérifie encore les conditions (a), (b), (c), si bien que l'on peut supposer  $X$  intègre. Soit  $U$  un ouvert affine non vide de  $X$ . Soit  $\mathcal{S}$  l'ensemble des points de  $U$  qui sont dans l'image de  $Y$ .  $\mathcal{S}$  est dense dans  $U$ , et de plus, comme  $Y \rightarrow X$  est un monomorphisme, l'extension résiduelle  $\kappa(f(y)) \hookrightarrow \kappa(y)$  est triviale pour tout  $y \in Y$ , de sorte que chaque point  $s \in \mathcal{S}$  se relève à  $Y$ . En appliquant la condition (c) à  $U$ , on obtient, quitte à réduire  $U$ , un relèvement de  $U$  à  $Y$ , rendant le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{array}{ccc} & & U \\ & \nearrow g & \uparrow \\ Y & \longrightarrow & X \end{array}$$

Alors  $Y = g(U) \cup f^{-1}(X \setminus U)$  est quasi-compact.

•  *$f$  est une immersion.*

C'est une question locale, donc il suffit de le faire au voisinage de chaque point  $x_0$  de  $X$ . On note encore  $Z = \overline{f(Y)} \subset X$ . Il y a trois cas à traiter :

- $x_0 \in X \setminus Z$ ,
- $x_0 \in f(Y)$ ,
- $x_0 \in Z \setminus f(Y)$ .

Le premier cas est trivial. Montrons que le troisième résulte du second. Il suffit pour cela de montrer que  $Z \setminus f(Y)$  est fermé. En effet,  $f(Y)$  sera alors un ouvert de  $Z$ , et s'écrira donc  $f(Y) = Z \cap U$  où  $U$  est un ouvert de  $X$ . Le morphisme  $f$  se factorisera par  $U$  et pour vérifier que c'est une immersion, il suffira de vérifier qu'il en est ainsi au voisinage de chaque point  $x_0$  de  $U$ , ce qui nous ramènera à l'un des deux premiers cas suivant que  $x_0$  appartient à  $\overline{f(Y)}$  ou non. Maintenant, si  $Z \setminus f(Y)$  n'était pas fermé, il existerait un point  $x_0 \in \overline{Z \setminus f(Y)} \cap f(Y)$ . D'après le second cas,  $f$  est une immersion au voisinage de  $x_0$ , donc il existe un voisinage  $U$  de  $x_0$  tel que  $f(Y) \cap U$  soit fermé dans  $U$ , ce qui contredit  $x_0 \in \overline{Z \setminus f(Y)}$  (remarquer que  $Z \cap U = f(Y) \cap U$ ).

Il nous reste donc à montrer que  $f$  est une immersion au voisinage de tout point de  $f(Y)$ . Soient  $y_0 \in Y$  et  $x_0 = f(y_0)$ . Il suffit de le faire pour un voisinage étale de  $x_0$ , car être une immersion fermée est une propriété de nature locale pour la topologie étale sur  $X$  ([29], (2.7.1)).

*Premier cas :  $X$  est un schéma local hensélien et noethérien dont  $x_0$  est le point fermé.*

Alors  $f : Y \rightarrow X$  est séparé et de type fini, et  $y_0$  est isolé dans sa fibre (car  $f$  est un monomorphisme) donc d'après [14], théorème (1.10) p.26, il existe un splittage  $Y = Y_0 \sqcup Y_1$  avec  $Y_0 \rightarrow X$  fini et  $y_0 \in Y_0$ . Comme  $f$  est un monomorphisme, il est injectif et  $f^{-1}(x_0) \cap Y_1$  est vide. De plus,  $Y_0 \rightarrow X$  est un monomorphisme propre, donc d'après [31] (18.12.6) c'est une immersion fermée. Il suffit donc de montrer que  $Y_1$  est vide. Dans le cas contraire,  $x_0 \in \overline{f(Y_1)}$ . Le morphisme  $f : Y \rightarrow X$  est de présentation finie donc d'après le théorème de Chevalley ([32], (7.1.4) p.329)  $f(Y_1)$  est constructible. Il s'écrit alors  $f(Y_1) = (U_1 \cap F_1) \cup \dots \cup (U_k \cap F_k)$ , où pour tout  $i$ ,  $F_i$  est un fermé irréductible,  $U_i$  un ouvert, et  $(U_i \cap F_i)$  est non vide. On a  $x_0 \in \overline{f(Y_1)} \subseteq \overline{F_1 \cup \dots \cup F_k}$ , par exemple  $x_0 \in F_1$ . On note  $x_1$  le point générique de  $F_1$ . Alors  $x_0 \in \overline{\{x_1\}}$ . Par ailleurs,  $U_1 \cap F_1$  est un ouvert non vide de  $F_1$ , donc il contient  $x_1$  et il existe  $y_1 \in Y_1$  tel que  $x_1 = f(y_1)$ . Le lemme précédent et la condition (b) impliquent alors que  $y_0 \in \overline{\{y_1\}}$ , ce qui est absurde car  $Y = Y_0 \sqcup Y_1$ .

*Cas général.*

On note  $X = \text{Spec } A$ ,  $X^h = \text{Spec } A^h$  où  $A^h$  est l'hensélisé de  $A$  en  $x_0$ , et  $f^h : Y^h \rightarrow X^h$  le morphisme obtenu par changement de base. Ce dernier vérifie encore les conditions (a), (b), (c), il est de type fini et  $A^h$  est local hensélien et noethérien. Donc d'après ce qui précède  $f^h$  est une immersion fermée. Maintenant, comme  $Y \rightarrow X$  est de présentation finie, et  $X$  quasi-compact, le théorème (8.10.5) de [30] nous assure qu'il existe un voisinage étale  $X'$  de  $x_0$  tel que le morphisme induit  $Y' \rightarrow X'$  soit une immersion fermée. Ceci montre que  $f$  est une immersion fermée au voisinage de  $x_0$  ([29], (2.7.1)) et achève la démonstration.  $\square$

On rappelle qu'un morphisme d'espaces algébriques est dit localement séparé si sa diagonale est une immersion quasi-compacte. Le lecteur érudit reconnaîtra dans le corollaire ci-dessous les conditions [3'] (a) et (b) du théorème (5.3) (p.48) de représentabilité pour les espaces algébriques de [12].

**Corollaire 2.1.1.4** *Soient  $S$  un schéma noethérien, et  $X, Y$  des espaces algébriques localement de présentation finie sur  $S$ . Soit  $f : Y \rightarrow X$  un morphisme localement de présentation finie. Alors  $f$  est localement séparé si et seulement si :*

- (a) *Pour tout anneau  $A$  de valuation (resp. de valuation discrète), de corps des fractions  $K$  et de corps résiduel  $k$ , pour tout couple  $(\xi, \eta) \in (Y \times_X Y)(A)$  tel que  $\xi_K = \eta_K$  et  $\xi_k = \eta_k$  on a  $\xi = \eta$ .*
- (b) *Soient  $A$  un anneau intègre et  $(\xi, \eta) \in (Y \times_X Y)(A)$ . On suppose qu'il existe un ensemble dense  $\mathcal{S}$  de points de  $\text{Spec } A$  tel que pour tout  $s \in \mathcal{S}$ , on ait  $\xi_s = \eta_s$ .*

Alors il existe un ouvert non vide  $U$  de  $\text{Spec } A$  tel que  $\xi_U = \eta_U$ .

**Démonstration.** La diagonale  $\Delta$  de  $f$  est un monomorphisme localement de présentation finie, et  $Y \times_X Y$  est localement noethérien. De plus les conditions (a) et (b) ci-dessus signifient précisément que  $\Delta$  vérifie les conditions (b) et (c) du théorème (2.1.1.2), de sorte que notre assertion en résulte.  $\square$

**Remarque 2.1.1.5** Pour les champs algébriques, on ne peut pas obtenir de critère de locale séparation, ni même de quasi-séparation, à partir du théorème (2.1.1.2), pour la simple raison que la diagonale d'un morphisme de champs algébriques n'est généralement pas un monomorphisme. En fait, si  $\mathcal{X}$  est un  $S$ -champ algébrique, sa diagonale est un monomorphisme si et seulement si  $\mathcal{X}$  est un  $S$ -espace algébrique. En conséquence nous devons développer d'autres techniques pour aboutir à la quasi-séparation du champ de Picard.

## 2.1.2 Sections globales et trivialité des faisceaux inversibles

Soient  $\mathcal{X}$  un champ algébrique, et  $\mathcal{L}$  un faisceau inversible sur  $\mathcal{X}$ . Le but de ce paragraphe est de donner des critères portant sur  $\Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{L})$  et éventuellement sur  $\Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{L}^{-1})$  permettant de voir facilement si  $\mathcal{L}$  est trivial. Le premier de ces critères montrera plus précisément que  $\mathcal{L}$  est trivial si et seulement s'il a une section globale « partout non nulle ». On rappelle que  $\Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{L})$  est l'ensemble des collections  $(s_{(V,v)})$  de sections de  $\mathcal{L}$  sur les  $(V, v) \in \text{ob } \underline{\text{Lis-ét}}(\mathcal{X})$  telles que pour toute flèche  $\varphi : (U, u) \rightarrow (V, v)$  dans  $\underline{\text{Lis-ét}}(\mathcal{X})$  on ait  $\text{rés}_\varphi s_{(V,v)} = s_{(U,u)}$ .

**Définition 2.1.2.1** Soit  $s$  une section globale de  $\mathcal{L}$ .

- (i) On dit que  $s$  est partout non nulle sur  $\mathcal{X}$  si pour tout ouvert lisse-étale  $(V, v)$  de  $\mathcal{X}$ , la section globale  $s_{(V,v)}$  de  $\mathcal{L}_{V,v}$  est partout non nulle sur  $V$ .
- (ii) Soit  $x \in |\mathcal{X}|$  un point de  $\mathcal{X}$ , représenté par un morphisme  $\varphi$  de  $\text{Spec } K$  vers  $\mathcal{X}$  (cf. [38], chapitre 5). La section  $s$  induit une section  $\varphi^*s$  de  $\Gamma(\text{Spec } K, \varphi^*\mathcal{L})$ . On dit que  $s$  est nulle en  $x$  si  $\varphi^*s = 0$ . (Il est clair que ceci ne dépend pas du représentant  $\varphi$  choisi.)

**Proposition 2.1.2.2** Soit  $s$  une section globale de  $\mathcal{L}$ . Les propositions suivantes sont équivalentes :

- (i)  $s$  est partout non nulle sur  $\mathcal{X}$  ;
- (ii)  $s$  est non nulle en tout point de  $\mathcal{X}$  ;
- (iii) le morphisme de  $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$  dans  $\mathcal{L}$  correspondant à  $s$  est un isomorphisme.

De plus l'ensemble des points de  $\mathcal{X}$  où  $s$  est non nulle est un ouvert de  $|\mathcal{X}|$ .

**Démonstration.** L'équivalence de (i) et (iii) résulte immédiatement du fait qu'une section globale  $s_{(V,v)}$  de  $\mathcal{L}_{V,v}$  est partout non nulle si et seulement si le morphisme correspondant de  $\mathcal{O}_V$  dans  $\mathcal{L}_{V,v}$  est un isomorphisme.

Le fait que (i) implique (ii) est clair puisque tout point de  $|\mathcal{X}|$  admet un représentant qui se factorise par un ouvert lisse-étale de  $\mathcal{X}$ . La réciproque est évidente aussi : plus généralement si  $s$  est non nulle en tout point de  $\mathcal{X}$  alors pour tout morphisme  $F : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$  la section  $F^*s$  est non nulle en tout point de  $\mathcal{Y}$ .

Pour la dernière assertion, soit  $x \in |\mathcal{X}|$  un point de  $\mathcal{X}$  en lequel  $s$  est non nulle et soit  $U$  un ouvert lisse-étale de  $\mathcal{X}$  le contenant. Il existe alors un voisinage  $V$  de  $x$  dans  $U$  tel que  $s$  soit non nulle en tout point de  $V$ , et son image est un voisinage ouvert de  $x$  dans  $\mathcal{X}$ .  $\square$

**Remarque 2.1.2.3** La section  $s$  définit en fait un idéal quasi-cohérent  $\mathcal{I}$  de  $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ , donc un sous-champ fermé de  $\mathcal{X}$ . Le fermé de  $|\mathcal{X}|$  correspondant est l'ensemble des points où  $s$  est nulle.

Il est bien connu qu'un faisceau inversible sur un schéma propre est trivial si et seulement s'il est engendré par ses sections globales, de même que son inverse. Nous aurons besoin d'un résultat analogue pour les champs. L'hypothèse de platitude cohomologique sous laquelle nous nous plaçons souvent rend le résultat presque trivial et nous dispense même de l'hypothèse de propreté (cf. 2.1.2.6).

**Définition 2.1.2.4** Soient  $\mathcal{X}$  un  $S$ -champ algébrique, et  $\mathcal{F}$  un faisceau de  $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ -modules. On dit que  $\mathcal{F}$  est engendré par ses sections globales s'il existe une famille de sections globales  $\{s^i\}_{i \in I}$ ,  $s^i \in \Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{F})$ , telle que pour tout  $(U, u) \in \text{ob } \underline{\text{Lis-ét}}(\mathcal{X})$ ,  $\mathcal{F}_{U,u}$  soit engendré par les sections  $\{s_{U,u}^i\}_{i \in I}$ .

**Remarque 2.1.2.5** Si  $\mathcal{F}$  est un faisceau inversible et si  $\{s_i\}_{i \in I}$  est une famille de sections globales de  $\mathcal{F}$ , alors la famille  $\{s_{U,u}^i\}_{i \in I}$  engendre  $(\mathcal{F}_{U,u})_x$  en un point  $x \in U$  où  $(U, u) \in \text{ob } \underline{\text{Lis-ét}}(\mathcal{X})$  si et seulement s'il existe un indice  $i$  tel que  $s^i$  soit non nulle au point de  $|\mathcal{X}|$  représenté par  $x$ . Donc  $\mathcal{F}$  est engendré par ses sections globales si et seulement si pour tout point  $x$  de  $|\mathcal{X}|$ ,  $\mathcal{F}$  a une section globale non nulle en  $x$ .

**Proposition 2.1.2.6** Soit  $\mathcal{X}$  un champ algébrique cohomologiquement plat en dimension zéro sur le spectre d'un corps  $k$ . Soit  $\mathcal{F}$  un faisceau inversible sur  $\mathcal{X}$ . Alors  $\mathcal{F}$  est trivial si et seulement si  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{F}^{-1}$  sont engendrés par leurs sections globales.

**Démonstration.** La partie « seulement si » est évidente puisque le faisceau  $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$  est engendré par sa section globale constante  $1 \in \Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{O}_{\mathcal{X}})$ . Pour la réciproque, supposons que  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{F}^{-1}$  soient engendrés par leurs sections globales. Soit  $x$  un point de  $\mathcal{X}$ . Il existe des sections  $s$  de  $\Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{F})$  et  $s'$  de  $\Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{F}^{-1})$  non nulles en  $x$ . Alors  $s \otimes s' \in \Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{O}_{\mathcal{X}})$  est non nulle en  $x$ . Mais  $\Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{O}_{\mathcal{X}}) = k$  par platitude cohomologique, donc  $s \otimes s'$  est partout non nulle sur  $\mathcal{X}$ , et donc  $s$  aussi, ce qui montre que  $\mathcal{F}$  est trivial.  $\square$

**Lemme 2.1.2.7** Soient  $\mathcal{X}$  un champ algébrique propre sur  $S = \text{Spec } k$ ,  $L/k$  une extension de  $k$ , et  $\mathcal{F}$  un faisceau inversible sur  $\mathcal{X}$ . Alors  $\mathcal{F}$  est engendré par ses sections globales si et seulement si  $\mathcal{F}_L$  l'est.

**Démonstration.** D'après [43], cor. 5 p.53 et [11], annexe A, on a un isomorphisme naturel  $H^0(\mathcal{X}, \mathcal{F}) \otimes_k L \xrightarrow{\sim} H^0(\mathcal{X} \otimes_k L, \mathcal{F}_L)$ . Supposons que  $\mathcal{F}$  soit engendré par ses sections globales. Soient  $y \in |\mathcal{X} \otimes_k L|$  un point de  $\mathcal{X} \otimes_k L$ , et  $x \in |\mathcal{X}|$  son image. Il existe par hypothèse une section globale  $s \in H^0(\mathcal{X}, \mathcal{F})$  non nulle en  $x$ . Alors  $s \otimes 1 \in H^0(\mathcal{X} \otimes_k L, \mathcal{F}_L)$  est non nulle en  $y$ . Réciproquement, si  $\mathcal{F}$  n'est pas engendré par ses sections globales, soit  $x \in |\mathcal{X}|$  un point de  $\mathcal{X}$  en lequel toute section globale de  $\mathcal{F}$  est nulle. Soit  $y \in |\mathcal{X} \otimes_k L|$  un antécédent de  $x$  ( $\mathcal{X} \otimes_k L \rightarrow \mathcal{X}$  est surjectif). Alors il est clair que toute section globale  $t \in H^0(\mathcal{X}, \mathcal{F}) \otimes_k L$  de  $\mathcal{F}_L$  est nulle en  $y$ , ce qui montre que  $\mathcal{F}_L$  n'est pas engendré par ses sections globales.  $\square$

**Corollaire 2.1.2.8** Soit  $\mathcal{X}$  un champ algébrique propre et cohomologiquement plat en dimension zéro sur un corps  $k$ . Soit  $L/k$  une extension de  $k$ . Alors  $\mathcal{F}$  est isomorphe à  $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$  si et seulement si  $\mathcal{F}_L$  est isomorphe à  $\mathcal{O}_{\mathcal{X} \times_k L}$ .  $\square$

### 2.1.3 Un peu de descente fidèlement plate

**Proposition 2.1.3.1** *Soit*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X}' & \longrightarrow & \mathcal{X} \\ F' \downarrow & \square & \downarrow F \\ \mathcal{Y}' & \xrightarrow{q} & \mathcal{Y} \end{array}$$

un diagramme 2-cartésien de  $S$ -champs algébriques.

- (i) *On suppose que le morphisme de changement de base  $q : \mathcal{Y}' \rightarrow \mathcal{Y}$  est surjectif et universellement ouvert (c'est en particulier le cas d'une présentation de  $\mathcal{Y}$ , ou encore d'un morphisme fidèlement plat et localement de présentation finie). Alors  $F$  est quasi-compact (resp. quasi-séparé) si et seulement si  $F'$  l'est.*
- (ii) *On suppose  $q$  fidèlement plat et quasi-compact, et  $F$  représentable. Alors  $F$  est une immersion quasi-compacte si et seulement si  $F'$  en est une.*
- (iii) *On suppose  $q$  fidèlement plat et quasi-compact. Alors  $F$  est localement séparé si et seulement si  $F'$  est localement séparé.*

**Démonstration.** (i) Pour la première assertion, la démonstration de [38], corollaire (5.6.3), est encore valable dans notre cas sans aucune modification. La seconde s'en déduit immédiatement en constatant que le morphisme diagonal  $\Delta_{F'}$  s'identifie au morphisme obtenu à partir de  $\Delta_F$  par le changement de base  $q$ .

(ii)  $F$  étant représentable, on se ramène formellement au cas où  $\mathcal{Y}$  est un schéma affine. Quitte à considérer une présentation de  $\mathcal{Y}'$ , on peut aussi supposer que  $\mathcal{Y}'$  est un schéma. Alors  $\mathcal{X}$  est un  $S$ -espace algébrique, et  $\mathcal{X}'$  est un schéma puisqu'une immersion est toujours schématique. Dans ce cas le résultat découle de l'effectivité de la descente des morphismes quasi-affines par morphismes fidèlement plats quasi-compacts.

(iii) se déduit formellement de (ii) en tenant compte du fait qu'un morphisme diagonal est toujours représentable.  $\square$

## 2.2 Locale séparation du foncteur de Picard

On vérifie dans le lemme ci-dessous les conditions (a) et (b) du corollaire 2.1.1.4 pour le foncteur de Picard.

**Lemme 2.2.1** *Soient  $A$  un anneau intègre,  $T = \operatorname{Spec} A$ , et  $\mathcal{X} \rightarrow T$  un  $T$ -champ algébrique propre, plat, de présentation finie, et cohomologiquement plat en dimension zéro. Soit  $\mathcal{L}$  un faisceau inversible sur  $\mathcal{X}$ .*

- (i) *Si  $A$  est un anneau local (en particulier si  $A$  est un anneau de valuation discrète), de corps résiduel  $k$  et de corps des fractions  $K$ , alors  $\mathcal{L}$  est trivial si et seulement si  $\mathcal{L}_k$  et  $\mathcal{L}_K$  le sont.*
- (ii) *S'il existe un ensemble dense  $\mathcal{S}$  de points de  $T$  tel que pour tout  $t \in \mathcal{S}$ ,  $\mathcal{L}_t$  soit trivial, alors il existe un ouvert non vide  $U$  de  $T$  tel que  $\mathcal{L}_U$  soit trivial.*

**Démonstration.** D'après l'annexe A de [11] les corollaires 1 et 2 du paragraphe 5 de [43] sont encore valables. Ils nous apprennent que la fonction

$$t \mapsto d(t) := \dim_{\kappa(t)} H^0(\mathcal{X}_t, \mathcal{L}_t)$$

est semi-continue supérieurement, et que si elle est constante sur  $T$  (qui est bien réduit et connexe), alors le morphisme naturel

$$(f_*\mathcal{L}) \otimes_{\mathcal{O}_T} \kappa(t) \longrightarrow H^0(\mathcal{X}_t, \mathcal{L}_t)$$



est un isomorphisme pour tout  $t \in T$ . De plus en un point où  $\mathcal{L}_t$  est trivial, on a  $H^0(\mathcal{X}_t, \mathcal{L}_t) = H^0(\mathcal{X}_t, \mathcal{O}_{\mathcal{X}_t}) \simeq \kappa(t)$  par platitude cohomologique, donc  $d(t) = 1$ .

(i) Ici comme  $\mathcal{L}_K$  et  $\mathcal{L}_k$  sont triviaux, la fonction  $d$  vaut 1 au point générique et au point fermé, donc elle est constante égale à 1 sur  $T$ . D'après ce qui précède, on a en particulier un isomorphisme  $H^0(T, f_*\mathcal{L}) \otimes_A k = H^0(\mathcal{X}, \mathcal{L}) \otimes_A k \rightarrow H^0(\mathcal{X}_k, \mathcal{L}_k)$ . Le faisceau  $\mathcal{L}_k$  étant trivial, il a une section globale partout non nulle sur  $\mathcal{X}_k$ . D'après l'isomorphisme précédent, cette section provient d'une section globale  $s$  de  $\mathcal{L}$  (comme  $k$  est un quotient de  $A$ , les éléments de  $H^0(\mathcal{X}, \mathcal{L}) \otimes_A k$  peuvent tous s'écrire sous la forme  $s \otimes 1$ ). Alors  $s$  est non nulle en tout point  $x$  de  $\mathcal{X}$  d'image  $\text{Spec } k$  dans  $T$ . D'après (2.1.2.2), l'ensemble  $C$  des points de  $\mathcal{X}$  où  $s$  est nulle est un fermé de  $|\mathcal{X}|$ . Comme  $f$  est propre, l'image de  $C$  est un fermé de  $T$ , qui de plus ne contient pas le point fermé. Nécessairement  $C$  est vide, donc  $s$  est partout non nulle et d'après (2.1.2)  $\mathcal{L}$  est trivial.

(ii) La fonction  $d$  étant semi-continue supérieurement, il existe un ouvert non vide sur lequel elle est constante et quitte à remplacer  $T$  par cet ouvert, on peut supposer qu'elle est constante. Dès lors pour tout  $t \in T$  le morphisme naturel

$$H^0(\mathcal{X}, \mathcal{L}) \otimes_A \kappa(t) \longrightarrow H^0(\mathcal{X}_t, \mathcal{L}_t)$$

est un isomorphisme. Soit  $t \in \mathcal{S}$ . Alors  $\mathcal{L}_t$  est trivial donc il a une section globale  $s_t \in H^0(\mathcal{X}_t, \mathcal{L}_t)$  partout non nulle sur  $\mathcal{X}_t$ . D'après l'isomorphisme précédent, elle provient d'un élément de  $H^0(\mathcal{X}, \mathcal{L}) \otimes_A \kappa(t)$  que l'on peut écrire sous la forme  $s \otimes (\frac{1}{f})$  où  $f \in A$  n'est pas dans l'idéal premier correspondant à  $t$ . Quitte à remplacer  $T$  par  $D(f)$ , on peut supposer  $f = 1$  et on a donc trouvé une section  $s \in H^0(\mathcal{X}, \mathcal{L})$  dont la réduction  $s_t$  à  $\mathcal{X}_t$  est partout non nulle.

Maintenant l'ensemble  $C$  des points de  $\mathcal{X}$  où  $s$  est nulle est un fermé de  $|\mathcal{X}|$  d'après (2.1.2.2), et son image est un fermé  $F$  de  $T$ , qui ne contient pas  $t$ . Son complémentaire  $U = T \setminus F$  est alors un ouvert non vide de  $T$ , et la section  $s_U$  induite par  $s$  sur  $\mathcal{X} \times_T U$  est partout non nulle sur  $\mathcal{X} \times_T U$ , de sorte que  $\mathcal{L}_U$  est trivial.  $\square$

**Proposition 2.2.2** *Soient  $S$  un schéma noethérien et  $\mathcal{X}$  un  $S$ -champ algébrique propre, plat, et cohomologiquement plat en dimension zéro. Alors le foncteur  $\text{Pic}_{\mathcal{X}/S}$  est un  $S$ -espace algébrique localement séparé.*

**Démonstration.** On sait déjà d'après [11] et la proposition (1.3.7) que  $\text{Pic}_{\mathcal{X}/S}$  est représentable par un  $S$ -espace préalgébrique. Il s'agit de montrer que le morphisme

$$\text{Pic}_{\mathcal{X}/S} \longrightarrow S$$

est localement séparé. Par (2.1.3.1) (iii) et (1.2.2.4), on peut supposer que le morphisme  $\mathcal{X} \rightarrow S$  a une section, ce qui nous ramène par (1.2.3.1) au cas où  $\text{Pic}_{\mathcal{X}/S}$  est donné par

$$\text{Pic}_{\mathcal{X}/S}(T) = \frac{\text{Pic}(\mathcal{X} \times_S T)}{\text{Pic}(T)}.$$

On peut appliquer le corollaire (2.1.1.4) au morphisme  $\text{Pic}_{\mathcal{X}/S} \rightarrow S$ , qui est bien localement de présentation finie par (1.4.1.1). Les conditions (a) et (b) sont vérifiées grâce au lemme précédent.  $\square$

## 2.3 Quasi-séparation du champ de Picard

Nous allons montrer dans ce paragraphe que sous de bonnes hypothèses, le champ de Picard  $\text{Pic}(\mathcal{X}/S)$  est quasi-séparé. En fait ce résultat se déduit sans trop d'efforts du

résultat de locale séparation du foncteur de Picard (2.2.2). Cependant, cette démarche peut sembler insatisfaisante, et il convient de donner de ce résultat une démonstration directe. Nous avons pour cela développé un critère de quasi-séparation pour les champs algébriques (2.3.2), inspiré du critère de locale séparation (2.1.1.4), qu'il nous a semblé pertinent d'énoncer séparément. Rappelons tout d'abord quelques notations.

Si  $\mathcal{X}$  est un  $S$ -champ,  $U \in \text{ob}(\text{Aff}/S)$ , et si  $x, y$  sont deux objets de  $\mathcal{X}_U$ , on notera respectivement  $\underline{\text{Aut}}(x)$  et  $\underline{\text{Isom}}(x, y)$  les foncteurs des automorphismes et des isomorphismes dont les définitions sont rappelées ci-dessous :

$$\underline{\text{Aut}}(x): \begin{cases} (\text{Aff}/U) & \longrightarrow (\text{Gr}) \\ (V \twoheadrightarrow U) & \longmapsto \text{Aut}(x_V) \end{cases}$$

$$\underline{\text{Isom}}(x, y): \begin{cases} (\text{Aff}/U) & \longrightarrow (\text{Ens}) \\ (V \twoheadrightarrow U) & \longmapsto \text{Isom}(x_V, y_V) \end{cases}.$$

Le résultat principal concernant le champ de Picard est le suivant.

**Théorème 2.3.1** *Soient  $S$  un schéma noethérien, et  $\mathcal{X}$  un  $S$ -champ algébrique propre, plat, et cohomologiquement plat en dimension zéro. Alors le champ de Picard  $\mathcal{P}\text{ic}(\mathcal{X}/S)$  est un  $S$ -champ algébrique (c'est-à-dire qu'il est quasi-séparé).*

**Première démonstration (utilisant (2.2.2))**

Notons  $\mathcal{P} = \mathcal{P}\text{ic}(\mathcal{X}/S)$ , et  $P = \text{Pic}_{\mathcal{X}/S}$ . D'après (2.2.2), le morphisme diagonal  $\Delta_P : P \rightarrow P \times_S P$  est une immersion quasi-compacte. On veut montrer que le morphisme diagonal  $\Delta_{\mathcal{P}}$  de  $\mathcal{P}$  est quasi-compact, i.e. que pour tout  $U \in \text{ob}(\text{Aff}/S)$  et tout couple  $(\mathcal{L}, \mathcal{M})$  de faisceaux inversibles sur  $\mathcal{X} \times_S U$ , le morphisme de  $U$ -espaces algébriques  $\underline{\text{Isom}}(\mathcal{L}, \mathcal{M}) \rightarrow U$  est quasi-compact. Les faisceaux  $\mathcal{L}$  et  $\mathcal{M}$  (plus précisément leurs classes d'isomorphie) définissent un morphisme  $([\mathcal{L}], [\mathcal{M}])$  de  $U$  dans  $P \times_S P$ . Notons  $U_0$  le sous-schéma quasi-compact de  $U$  sur lequel  $\mathcal{L}$  et  $\mathcal{M}$  sont isomorphes, i.e. le sous-schéma défini par le carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} U_0 & \hookrightarrow & U \\ \downarrow & \square & \downarrow ([\mathcal{L}], [\mathcal{M}]) \\ P & \xrightarrow{\Delta_P} & P \times_S P \end{array}$$

Alors on a une factorisation :

$$\begin{array}{ccc} \underline{\text{Isom}}(\mathcal{L}, \mathcal{M}) & \longrightarrow & U \\ & \searrow & \uparrow \\ & & U_0 \end{array}$$

qui provient de la commutativité du diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc} \underline{\text{Isom}}(\mathcal{L}, \mathcal{M}) & \longrightarrow & \mathcal{P} & \xrightarrow{\pi} & P \\ \downarrow & \square & \downarrow \Delta_{\mathcal{P}} & & \downarrow \Delta_P \\ U & \xrightarrow{([\mathcal{L}], [\mathcal{M}])} & \mathcal{P} \times_S \mathcal{P} & \xrightarrow{\pi \times \pi} & P \times_S P \end{array}$$

(où  $\pi$  désigne le morphisme naturel  $\mathcal{P} \rightarrow P$ ). Il suffit donc de montrer que

$$\underline{\text{Isom}}(\mathcal{L}, \mathcal{M}) \longrightarrow U_0$$

est quasi-compact. Or c'est un épimorphisme (on peut le voir soit de manière directe, soit en constatant qu'on a un diagramme 2-cartésien

$$\begin{array}{ccc} \underline{\text{Isom}}(\mathcal{L}, \mathcal{M}) & \longrightarrow & U_0 \\ \downarrow & \square & \downarrow \\ \mathcal{P} & \xrightarrow{\Delta_\pi} & \mathcal{P} \times_P \mathcal{P} \end{array}$$

et en se rappelant que  $\pi$  est une gerbe).  $\underline{\text{Isom}}(\mathcal{L}, \mathcal{M}) \rightarrow U_0$  est donc un toreleur sous  $\underline{\text{Aut}}(\mathcal{M})$ , c'est-à-dire un  $\mathbb{G}_m$ -torseur puisque par platitude cohomologique,  $\underline{\text{Aut}}(\mathcal{M})$  est isomorphe à  $\mathbb{G}_m$ . Alors  $\underline{\text{Isom}}(\mathcal{L}, \mathcal{M}) \rightarrow U_0$  est quasi-compact puisque  $\mathbb{G}_m$  est quasi-compact.  $\square$

La proposition ci-dessous donne un critère général de quasi-séparation, grâce auquel nous pourrions donner une seconde démonstration, directe, du fait que le champ de Picard est quasi-séparé.

**Proposition 2.3.2** *Soient  $S$  un schéma localement noethérien et  $\mathcal{X}$  un  $S$ -champ préalgébrique localement de présentation finie. On suppose que les deux conditions suivantes sont remplies.*

(i) *Pour tout  $U \in \text{ob}(\text{Aff}/S)$  et tout  $x \in \text{ob } \mathcal{X}_U$ , le morphisme  $\underline{\text{Aut}}(x) \rightarrow U$  est quasi-compact.*

(ii) *Soit  $U \in \text{ob}(\text{Aff}/S)$  intègre, et soient  $x, y \in \text{ob } \mathcal{X}_U$ . On suppose qu'il existe un ensemble dense de points  $t$  de  $U$ , tels qu'il existe une extension  $L(t)$  de  $\kappa(t)$  telle que  $x_{L(t)} \simeq y_{L(t)}$ . Alors  $x$  et  $y$  sont isomorphes sur un ouvert dense de  $U$ .*

*Alors  $\mathcal{X}$  est quasi-séparé. (Autrement dit c'est un  $S$ -champ algébrique.)*

**Démonstration.** Le champ  $\mathcal{X} \times_S \mathcal{X}$  est localement noethérien (car localement de présentation finie sur  $S$ ). Soit  $U \rightarrow \mathcal{X} \times_S \mathcal{X}$  une présentation de  $\mathcal{X} \times_S \mathcal{X}$ , où  $U$  est un schéma localement noethérien. Alors par (2.1.3.1) (i), pour montrer que  $\Delta : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X} \times_S \mathcal{X}$  est quasi-compact, il suffit de montrer que le morphisme obtenu par changement de base

$$\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & U \\ \downarrow & \square & \downarrow (x,y) \\ \mathcal{X} & \longrightarrow & \mathcal{X} \times_S \mathcal{X} \end{array}$$

est quasi-compact. Comme c'est une question locale sur  $U$ , on peut supposer  $U$  affine. Il s'agit donc de montrer que si  $U$  est un schéma affine noethérien, et si  $x, y$  sont deux objets de  $\mathcal{X}_U$ , alors  $I = \underline{\text{Isom}}(x, y) \xrightarrow{f} U$  est un morphisme quasi-compact.

Soit  $G = \underline{\text{Aut}}(y)$ . L'action à gauche naturelle de  $G$  sur  $I$  fait clairement de  $I \rightarrow U$  un pseudo-torseur<sup>2</sup> sous  $G$ . Par récurrence noethérienne sur les fermés de  $U$ , on peut supposer que pour tout fermé strict  $F$  de  $U$ ,  $I \times_U F$  est quasi-compact. Il suffit maintenant de trouver un ouvert non vide  $V$  de  $U$  tel que  $I \times_U V$  soit quasi-compact. En effet, si  $V$  est un tel ouvert, alors en notant  $F = U \setminus V$ , l'espace algébrique  $I' = (I \times_U V) \amalg (I \times_U F)$  est quasi-compact, et le morphisme  $I' \rightarrow I$  obtenu par changement de base à partir de  $V \amalg F \rightarrow U$  est surjectif, donc  $I$  est quasi-compact.

2. Autrement dit la flèche  $I \rightarrow U$  est invariante sous  $G$ , et le morphisme naturel  $G \times I \rightarrow I \times_U I$  est un isomorphisme.

Posons  $Z = \overline{f(I)}$ . Soit  $W$  un ouvert affine intègre de  $Z_{\text{réd}}$ . Alors le morphisme  $f_W : I \times_U W \rightarrow W$  est dominant, et la condition (ii) signifie précisément que dans ce cas, quitte à choisir  $W$  plus petit,  $f_W$  a une section. Ceci prouve que  $I \times_U W$  est un tore sous  $G$ , donc est quasi-compact. Ceci étant, on peut écrire  $W = Z_{\text{réd}} \cap V = Z_{\text{réd}} \times_U V$  où  $V$  est un ouvert (non vide) de  $U$ . On vérifie sans peine que le morphisme induit  $I \times_U W \rightarrow I \times_U V$  est surjectif, ce qui montre que  $I \times_U V$  est quasi-compact, et achève la démonstration.  $\square$

**Seconde démonstration du théorème (2.3.1)** On sait déjà d'après [11] que le  $S$ -champ  $\mathcal{P}ic(\mathcal{X}/S)$  est préalgébrique. Il est localement de présentation finie d'après 1.4.1.1. La condition (i) résulte du fait que, par platitude cohomologique, pour tout faisceau inversible  $\mathcal{L}$  sur  $\mathcal{X} \times_S U$ , le  $U$ -espace en groupes  $\underline{\text{Aut}}(\mathcal{L})$  est isomorphe à  $\mathbb{G}_{m,U}$ , donc il est quasi-compact. La condition (ii) résulte du lemme (2.2.1) (ii) et de (2.1.2.8).  $\square$

## Chapitre 3

# Théorie des déformations

### 3.1 Conditions de Schlessinger

Dans toute cette section, on suppose que  $S = \operatorname{Spec} R$  est un schéma affine, et on considère un carré cartésien de  $R$ -algèbres :

$$\begin{array}{ccc} B' & \longrightarrow & A' \\ \downarrow & \square & \downarrow p \\ B & \longrightarrow & A. \end{array}$$

$B'$  est donc isomorphe au produit fibré  $A' \times_A B$ . On suppose de plus que  $p$  est surjectif.

On rappelle le théorème suivant, dû à Ferrand, où pour tout anneau  $R'$ ,  $\operatorname{Mod}^{\operatorname{pl}}(R')$  désigne la catégorie des  $R'$ -modules plats.

**Théorème 3.1.1 ([23], th. 2.2)** *Le foncteur*

$$\operatorname{Mod}^{\operatorname{pl}}(B') \longrightarrow \operatorname{Mod}^{\operatorname{pl}}(A') \times_{\operatorname{Mod}^{\operatorname{pl}}(A)} \operatorname{Mod}^{\operatorname{pl}}(B)$$

*qui à un  $B'$ -module  $M$  associe le triplet  $(M \otimes_{B'} A', M \otimes_{B'} B, \varphi)$ , où  $\varphi$  est l'isomorphisme canonique  $(M \otimes_{B'} A') \otimes_{A'} A \xrightarrow{\sim} (M \otimes_{B'} B) \otimes_B A$ , est une équivalence de catégories. Une quasi-inverse est donné par le foncteur qui à un triplet  $(M', N, \varphi)$ , associe le  $A' \times_A B$ -module*

$$S(M', N, \varphi) = \{(m', n) \in M' \times N \mid \varphi(1 \otimes m') = 1 \otimes n\}.$$

*L'énoncé est encore valable en remplaçant la condition « plats » par « plats et de type fini », « projectifs et de type fini », ou encore « localement libres de rang 1 ».*

Nous allons en déduire un théorème de comparaison entre la catégorie des faisceaux inversibles sur  $\mathcal{X}_{B'}$  et le produit fibré des catégories des faisceaux inversibles sur  $\mathcal{X}_{A'}$  et sur  $\mathcal{X}_B$ . (Ici un indice comme  $\mathcal{X}_A$  désigne le changement de base  $\mathcal{X} \times_S \operatorname{Spec} A$ .)

**Théorème 3.1.2** *Avec les notations précédentes, si  $\mathcal{X}$  est un champ algébrique plat sur  $S$ , on a une équivalence de catégories*

$$\operatorname{Inv}(\mathcal{X}_{B'}) \longrightarrow \operatorname{Inv}(\mathcal{X}_{A'}) \times_{\operatorname{Inv}(\mathcal{X}_A)} \operatorname{Inv}(\mathcal{X}_B).$$

**Démonstration.**

Commençons par l'observation suivante. Soient  $\mathcal{U}$  un  $S$ -champ algébrique,  $U^1$  un  $S$ -espace algébrique, et soit  $U^1 \rightarrow \mathcal{U}$  un épimorphisme. On note  $U^2 = U^1 \times_{\mathcal{U}} U^1$  et  $U^3 = U^1 \times_{\mathcal{U}} U^1 \times_{\mathcal{U}} U^1$ . Alors d'après 1.1.1.6 la catégorie  $\text{Inv}(\mathcal{U})$  est équivalente à la catégorie  $\text{Desc}(U^1, \mathcal{U})$  définie comme suit :

- un objet de  $\text{Desc}(U^1, \mathcal{U})$  est la donnée d'un faisceau inversible  $\mathcal{L}$  sur  $U^1$  et d'un isomorphisme  $\varphi : pr_1^* \mathcal{L} \rightarrow pr_2^* \mathcal{L}$  dans  $\text{Inv}(U^1 \times_{\mathcal{U}} U^1) = \text{Inv}(U^2)$  vérifiant la condition de cocycle

$$pr_{1,3}^* \varphi = pr_{2,3}^* \varphi \circ pr_{1,2}^* \varphi$$

dans  $\text{Inv}(U^3)$  ;

- un morphisme de  $(\mathcal{L}, \varphi)$  vers  $(\mathcal{L}', \varphi')$  est la donnée d'un isomorphisme  $\alpha$  de  $\mathcal{L}$  vers  $\mathcal{L}'$  faisant commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} pr_1^* \mathcal{L} & \xrightarrow{\varphi} & pr_2^* \mathcal{L} \\ pr_1^* \alpha \downarrow & & \downarrow pr_2^* \alpha \\ pr_1^* \mathcal{L}' & \xrightarrow{\varphi'} & pr_2^* \mathcal{L}' \end{array}$$

De plus la construction de  $\text{Desc}(U^1, \mathcal{U})$  commute aux produits fibrés de catégories, de sorte que si les trois foncteurs naturels

$$\text{Inv}(U_{B'}^i) \longrightarrow \text{Inv}(U_{A'}^i) \times_{\text{Inv}(U_A^i)} \text{Inv}(U_B^i), \quad i = 1, 2, 3,$$

sont des équivalences de catégories, il en est de même du foncteur

$$\text{Inv}(\mathcal{U}_{B'}) \longrightarrow \text{Inv}(\mathcal{U}_{A'}) \times_{\text{Inv}(\mathcal{U}_A)} \text{Inv}(\mathcal{U}_B).$$

Revenons à la démonstration proprement dite de notre théorème.

*Premier cas :  $\mathcal{X}$  est un  $S$ -schéma affine  $\text{Spec } R'$ .*

Alors l'assertion résulte du théorème (3.1.1) et du lemme suivant.

**Lemme 3.1.3** *Si  $R'$  est une  $R$ -algèbre plate, alors le carré obtenu par changement de base*

$$\begin{array}{ccc} B' \otimes_R R' & \longrightarrow & A' \otimes_R R' \\ \downarrow & & \downarrow p_{R'} \\ B \otimes_R R' & \longrightarrow & A \otimes_R R' \end{array}$$

*est encore cartésien, et  $p_{R'}$  est surjectif.*

**Démonstration.** Un carré de  $R$ -algèbres est cartésien si et seulement si le carré sous-jacent de  $R$ -modules l'est. Or un carré de  $R$ -modules

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ \downarrow & & \downarrow f \\ G & \xrightarrow{g} & H \end{array}$$

est cartésien si et seulement si la suite induite

$$0 \longrightarrow E \longrightarrow F \oplus G \xrightarrow{f-g} H$$

est exacte. Cette condition est évidemment stable par changement de base plat. La surjectivité de  $p_{R'}$  est claire.  $\square$

*2<sup>ème</sup> cas :  $\mathcal{X}$  est un  $S$ -schéma qui est union disjointe de schémas affines.*

On a  $\mathcal{X} = \coprod_i X_i$ , où chaque  $X_i$  est affine. Alors  $\text{Inv}(\mathcal{X}) = \prod_i \text{Inv}(X_i)$  universellement,

et l'assertion est vraie pour chacun des  $S$ -schémas  $X_i$ , donc il suffit de montrer que les produits fibrés de catégories commutent aux produits arbitraires, ce qui est purement formel et évident.

*3<sup>ème</sup> cas :  $\mathcal{X}$  est un schéma séparé.*

Soit  $X$  l'union disjointe d'une famille d'ouverts affines recouvrant  $\mathcal{X}$ . Alors  $X$ ,  $X \times_{\mathcal{X}} X$ , et  $X \times_{\mathcal{X}} X \times_{\mathcal{X}} X$  sont unions disjointes de schémas affines, donc d'après la remarque qui amorçait notre démonstration, l'assertion résulte du second cas.

*4<sup>ème</sup> cas :  $\mathcal{X}$  est un  $S$ -schéma quelconque.*

De même que précédemment soit  $X$  la somme des ouverts d'un recouvrement affine de  $\mathcal{X}$ . Alors  $X$  est séparé, et,  $\mathcal{X}$  étant localement séparé (comme tout schéma!), les schémas  $X \times_{\mathcal{X}} X$  et  $X \times_{\mathcal{X}} X \times_{\mathcal{X}} X$  sont séparés, donc il suffit d'appliquer le troisième cas.

*5<sup>ème</sup> cas :  $\mathcal{X}$  est un  $S$ -espace algébrique.*

On choisit un morphisme étale surjectif  $X \rightarrow \mathcal{X}$  où  $X$  est un schéma. La diagonale d'un espace algébrique étant schématique (par définition), on voit que  $X \times_{\mathcal{X}} X$  et  $X \times_{\mathcal{X}} X \times_{\mathcal{X}} X$  sont encore des schémas, de sorte que l'assertion résulte du cas précédent.

*6<sup>ème</sup> cas :  $\mathcal{X}$  est un  $S$ -champ algébrique.*

On choisit une présentation  $P : X \rightarrow \mathcal{X}$  par un espace algébrique. Alors  $X \times_{\mathcal{X}} X$  et  $X \times_{\mathcal{X}} X \times_{\mathcal{X}} X$  sont encore des espaces algébriques, donc d'après la discussion préliminaire le résultat se déduit du cinquième cas.  $\square$

**Corollaire 3.1.4** *On garde les hypothèses et notations du théorème précédent, mais on suppose de plus que  $p$  est une extension infinitésimale (i.e. un morphisme surjectif à noyau nilpotent), et non seulement un morphisme surjectif. On suppose également que le morphisme  $f : \mathcal{X} \rightarrow S$  est cohomologiquement plat en dimension zéro. Alors les morphismes naturels*

$$\text{Pic}(\mathcal{X}_{B'}) \longrightarrow \text{Pic}(\mathcal{X}_{A'}) \times_{\text{Pic}(\mathcal{X}_A)} \text{Pic}(\mathcal{X}_B)$$

et

$$P_{\mathcal{X}/S}(B') \longrightarrow P_{\mathcal{X}/S}(A') \times_{P_{\mathcal{X}/S}(A)} P_{\mathcal{X}/S}(B)$$

sont des isomorphismes.

**Démonstration.** On a un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X}_{B'} & \longleftarrow & \mathcal{X}_{A'} \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathcal{X}_B & \longleftarrow & \mathcal{X}_A \end{array}$$

qui induit le premier morphisme évoqué dans l'énoncé après application du foncteur  $\text{Pic}$ . La surjectivité résulte tautologiquement du théorème précédent. Montrons que c'est un morphisme injectif. Soit  $\mathcal{L}_{B'}$  un faisceau inversible sur  $\mathcal{X}_{B'}$  tel que  $\mathcal{L}_{B'}|_{\mathcal{X}_{A'}}$  et  $\mathcal{L}_{B'}|_{\mathcal{X}_B}$  soient triviaux. On veut montrer que  $\mathcal{L}_{B'}$  est isomorphe à  $\mathcal{O}_{\mathcal{X}_{B'}}$ . Vu l'équivalence de catégories (3.1.2), il suffit de trouver des isomorphismes

$$\mathcal{L}_{B'}|_{\mathcal{X}_{A'}} \xrightarrow{\varphi_{A'}} \mathcal{O}_{\mathcal{X}_{A'}}$$

$$\mathcal{L}_{B'|X_B} \xrightarrow{\varphi_B} \mathcal{O}_{X_B}$$

tels que, aux isomorphismes canoniques près,  $\varphi_{A'|X_A}$  et  $\varphi_{B|X_A}$  soient égaux. On sait par hypothèse qu'il existe un  $\varphi_{A'}$  et un  $\varphi_B$ , mais *a priori*  $\varphi_{A'|X_A} \neq \varphi_{B|X_A}$ . Soit  $\psi = (\varphi_{A'|X_A})(\varphi_{B|X_A})^{-1}$ .  $\psi$  est un isomorphisme de  $\mathcal{O}_{X_A}$ , donc correspond à un élément de  $\Gamma(X_A, \mathcal{O}_{X_A})^\times$ . On voudrait que  $\psi$  soit l'identité de  $\mathcal{O}_{X_A}$ . Il suffirait pour cela de corriger  $\varphi_{A'}$  (ou  $\varphi_B$ ) par un automorphisme de  $\mathcal{O}_{X_{A'}}$  (ou  $\mathcal{O}_{X_B}$ ) qui induise  $\psi$  sur  $\mathcal{O}_{X_A}$ . Il suffit donc pour conclure de montrer que l'une des deux flèches

$$\begin{aligned} \Gamma(X_{A'}, \mathcal{O}_{X_{A'}})^\times &\longrightarrow \Gamma(X_A, \mathcal{O}_{X_A})^\times, \\ \Gamma(X_B, \mathcal{O}_{X_B})^\times &\longrightarrow \Gamma(X_A, \mathcal{O}_{X_A})^\times, \end{aligned}$$

est surjective. Or par platitude cohomologique en dimension zéro, on a  $\Gamma(X_T, \mathcal{O}_{X_T}) = T$  pour toute  $R$ -algèbre  $T$ , donc il suffit que  $A'^\times \rightarrow A^\times$  ou  $B^\times \rightarrow A^\times$  soit surjective. Comme  $A' \rightarrow A$  est une extension infinitésimale,  $A \simeq A'/I$  avec  $I$  nilpotent et on voit facilement que  $A'^\times \rightarrow A^\times$  est surjective.

Passons maintenant au foncteur de Picard relatif. Il s'agit de montrer que le morphisme naturel

$$\frac{\text{Pic}(\mathcal{X}_{B'})}{\text{Pic}(B')} \longrightarrow \frac{\text{Pic}(\mathcal{X}_{A'})}{\text{Pic}(A')} \times_{\frac{\text{Pic}(\mathcal{X}_A)}{\text{Pic}(A)}} \frac{\text{Pic}(\mathcal{X}_B)}{\text{Pic}(B)}$$

est un isomorphisme. On sait déjà grâce à la platitude cohomologique de  $f$  que pour tout  $S$ -schéma  $T$ ,  $\text{Pic}(T)$  s'injecte dans  $\text{Pic}(\mathcal{X} \times_S T)$  (cf. th. (1.2.3.1)). On identifie dans la suite  $\text{Pic}(T)$  à un sous-groupe de  $\text{Pic}(\mathcal{X} \times_S T)$ .

*Injectivité* : Soit  $b' \in \text{Pic}(\mathcal{X}_{B'})$ . On note  $a'$ ,  $b$ , et  $a$  ses images dans  $\text{Pic}(\mathcal{X}_{A'})$ ,  $\text{Pic}(\mathcal{X}_B)$ , et  $\text{Pic}(\mathcal{X}_A)$ , et on suppose que  $a' \in \text{Pic}(A')$  et  $b \in \text{Pic}(B)$ . Il s'agit de montrer que  $b' \in \text{Pic}(B')$ . Les éléments  $a'$  et  $b$  ont même image dans  $\text{Pic}(A)$  donc grâce à l'isomorphisme

$$\text{Pic}(B') \simeq \text{Pic}(A') \times_{\text{Pic}(A)} \text{Pic}(B)$$

il existe un élément  $\beta'$  de  $\text{Pic}(B')$  qui induit le couple  $(a', b)$ . Maintenant  $b'$  et  $\beta'$  ont la même image dans  $\text{Pic}(\mathcal{X}_{A'}) \times_{\text{Pic}(\mathcal{X}_A)} \text{Pic}(\mathcal{X}_B)$  donc d'après ce qui précède  $b' = \beta'$ .

*Surjectivité* : Soient  $a' \in \text{Pic}(\mathcal{X}_{A'})$  et  $b \in \text{Pic}(\mathcal{X}_B)$  induisant le même élément dans  $\text{Pic}(\mathcal{X}_A)$  modulo  $\text{Pic}(A)$ . Comme  $\text{Pic}(A') \rightarrow \text{Pic}(A)$  est surjectif (cf. lemme (3.1.5)) on peut supposer, quitte à corriger  $a'$  par un élément de  $\text{Pic}(A')$  bien choisi, que  $(a', b) \in \text{Pic}(\mathcal{X}_{A'}) \times_{\text{Pic}(\mathcal{X}_A)} \text{Pic}(\mathcal{X}_B)$ . Alors il existe un élément  $b'$  de  $\text{Pic}(\mathcal{X}_{B'})$  qui induit  $(a', b)$ , ce qui montre le résultat attendu.  $\square$

**Lemme 3.1.5** *Si  $A' \rightarrow A$  est une extension infinitésimale, alors le morphisme*

$$\text{Pic}(A') \longrightarrow \text{Pic}(A)$$

*est un isomorphisme.*

**Démonstration.** Signalons tout d'abord que l'on peut supposer que le noyau de  $A' \rightarrow A$  est de carré nul, puisqu'une extension infinitésimale peut s'écrire comme la composée d'extensions infinitésimales à noyaux de carrés nuls. On a une suite exacte de  $A'$ -modules :

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

où  $I$  est le noyau de  $A' \rightarrow A$ . On en déduit une suite exacte de  $\mathcal{O}_{\text{Spec } A'}$ -modules

$$0 \longrightarrow \tilde{I} \longrightarrow \mathcal{O}_{\text{Spec } A'} \longrightarrow \mathcal{O}_{\text{Spec } A} \longrightarrow 0,$$



d'où une suite exacte de faisceaux de groupes abéliens sur  $\mathrm{Spec} A'$  (ou sur  $\mathrm{Spec} A$ , n'oublions pas qu'ils ont le même espace topologique sous-jacent) via l'application exponentielle  $x \mapsto 1 + x$  :

$$0 \longrightarrow \tilde{I} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathrm{Spec} A'}^\times \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathrm{Spec} A}^\times \longrightarrow 0.$$

La suite exacte longue de cohomologie associée, et la nullité des groupes  $H^1(\mathrm{Spec} A', \tilde{I})$  et  $H^2(\mathrm{Spec} A', \tilde{I})$  nous donnent le résultat.  $\square$

## 3.2 Déformations de faisceaux inversibles

Commençons par une petite remarque d'algèbre que nous utiliserons abondamment par la suite et que, par commodité, nous énonçons sous la forme d'un lemme.

**Lemme 3.2.1** *Soient  $A$  un anneau et  $I$  un idéal de carré nul de  $A$ . On note  $\pi$  la projection canonique  $\pi : A \twoheadrightarrow A/I$ .*

- 1) *Le morphisme de groupes abéliens  $\pi^\times : A^\times \twoheadrightarrow (A/I)^\times$  induit par  $\pi$  est surjectif.*
  - 2) *L'application  $x \mapsto 1 + x$  induit un isomorphisme de groupes abéliens de  $I$  sur  $\mathrm{Ker} \pi^\times$ .*
- $\square$

Soit  $\mathcal{X}$  un champ algébrique sur un schéma  $T$  et soit  $\mathcal{L}$  un faisceau inversible sur  $\mathcal{X}$ . On considère une immersion fermée

$$i : \mathcal{X} \longrightarrow \widetilde{\mathcal{X}}$$

définie par un idéal quasi-cohérent  $I$  de  $\widetilde{\mathcal{X}}$  de carré nul.

**Remarque 3.2.2** Si  $\mathcal{X}$  et  $\widetilde{\mathcal{X}}$  sont des champs de Deligne-Mumford, le morphisme  $i$  induit une équivalence de sites entre les sites étales de  $\mathcal{X}$  et de  $\widetilde{\mathcal{X}}$ , ce qui permet d'identifier les topos étales de  $\mathcal{X}$  et de  $\widetilde{\mathcal{X}}$ . Il est alors évident que la catégorie des  $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ -modules quasi-cohérents est équivalente à la catégorie des  $\mathcal{O}_{\widetilde{\mathcal{X}}}$ -modules quasi-cohérents annulés par  $I$ . Lorsque l'on travaille avec des champs d'Artin (donc avec leurs sites lisses-étales) il faut être plus prudent. En effet le foncteur naturel du site lisse-étale de  $\widetilde{\mathcal{X}}$  vers celui de  $\mathcal{X}$  n'est même plus fidèle si bien que ces derniers ne sont *a priori* pas équivalents. Cependant, la descente fidèlement plate des modules quasi-cohérents (cf. par exemple 1.1.1.6) nous permet encore d'identifier la catégorie des  $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ -modules à la catégorie des  $\mathcal{O}_{\widetilde{\mathcal{X}}}$ -modules annulés par  $I$ . En particulier, l'idéal  $I$  peut être vu comme un  $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ -module.

On note  $\mathrm{Defm}(\mathcal{L})$  la catégorie des déformations de  $\mathcal{L}$  à  $\widetilde{\mathcal{X}}$  définie de la manière suivante. Un objet de  $\mathrm{Defm}(\mathcal{L})$  est un couple  $(\widetilde{\mathcal{L}}, \lambda)$  où  $\widetilde{\mathcal{L}}$  est un faisceau inversible sur  $\widetilde{\mathcal{X}}$  et  $\lambda$  est un isomorphisme  $\lambda : i^* \widetilde{\mathcal{L}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}$ . Un morphisme de  $(\widetilde{\mathcal{L}}, \lambda)$  vers  $(\widetilde{\mathcal{M}}, \mu)$  est un isomorphisme  $\alpha : \widetilde{\mathcal{L}} \xrightarrow{\sim} \widetilde{\mathcal{M}}$  tel que  $\mu \circ i^* \alpha = \lambda$ . On note  $\overline{\mathrm{Defm}(\mathcal{L})}$  l'ensemble des classes d'isomorphie de  $\mathrm{Defm}(\mathcal{L})$ .

Dans [11], Aoki définit la catégorie  $\mathrm{Defm}_T(f)$  des déformations d'un morphisme de  $T$ -champs algébriques  $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  et en donne une description complète au théorème 2.1.1, que nous rappelons ci-dessous. Nous renvoyons à *loc. cit.* pour les notations précises et la définition de  $\mathrm{Defm}_T(f)$ .

**Théorème 3.2.3 (Aoki)** (1) *Il existe un élément  $\omega \in \mathrm{Ext}^1(\mathrm{L}f^* \mathrm{L}_{\mathcal{Y}/T}, I)$  dont l'annulation équivaut à l'existence d'une déformation de  $f$ .*

- (2) Si  $\omega = 0$ , alors  $\overline{\text{Defm}_T(f)}$  est un toreur sous  $\text{Ext}^0(Lf^*L_{\mathcal{Y}/T}, I)$ .
- (3) Si  $(\tilde{f}, \lambda)$  est une déformation de  $f$ , son groupe d'automorphismes est isomorphe à  $\text{Ext}^{-1}(Lf^*L_{\mathcal{Y}/T}, I)$ .

En appliquant ce théorème avec  $\mathcal{Y} = \text{B}\mathbb{G}_m$ , et en tenant compte du fait que la catégorie des morphismes de  $\mathcal{X}$  vers  $\text{B}\mathbb{G}_m$  est équivalente à la catégorie des faisceaux inversibles sur  $\mathcal{X}$ , on en déduit une description de la catégorie  $\text{Defm}(\mathcal{L})$  en termes des groupes  $\text{Ext}^i(Lf^*L_{\text{B}\mathbb{G}_m/T}, I)$  (où  $f$  désigne le morphisme  $\mathcal{X} \rightarrow \text{B}\mathbb{G}_m$  correspondant au faisceau inversible  $\mathcal{L}$  sur  $\mathcal{X}$ ), que nous allons promptement remplacer par les groupes de cohomologie de  $\mathcal{X}$  à valeurs dans  $I$  grâce au lemme suivant.

**Lemme 3.2.4** *Pour tout  $i \in \mathbb{Z}$ , on a  $\text{Ext}^i(Lf^*L_{\text{B}\mathbb{G}_m/T}, I) = H^{i+1}(\mathcal{X}, I)$ .*

**Démonstration.** Commençons par calculer le complexe cotangent de  $\text{B}\mathbb{G}_m$  sur  $T$ . On va montrer qu'il est représenté par le complexe  $\mathcal{O}_{\text{B}\mathbb{G}_m}[-1]$ , qui a pour seul terme non nul  $\mathcal{O}_{\text{B}\mathbb{G}_m}$  situé en degré 1. Vu que  $\text{B}\mathbb{G}_m$  est lisse, on sait d'après [38] (17.8) que  $L_{\text{B}\mathbb{G}_m/T}$  est canoniquement isomorphe à  $L_{\Delta}[-1]$ , où  $L_{\Delta}$  est le complexe cotangent du morphisme diagonal

$$\Delta : \text{B}\mathbb{G}_m \longrightarrow \text{B}\mathbb{G}_m \times_T \text{B}\mathbb{G}_m.$$

Mais comme  $\Delta$  est représentable et lisse, la proposition (17.5.8) de [38] montre que le système projectif  $L_{\Delta}$  est essentiellement constant, et peut être représenté par le  $\mathcal{O}_{\text{B}\mathbb{G}_m}$ -module quasi-cohérent  $\Omega_{\Delta} = \Omega_{\text{B}\mathbb{G}_m/\text{B}\mathbb{G}_m \times_T \text{B}\mathbb{G}_m}$  placé en degré 0 (rappelons que par définition  $\Omega_{\Delta}$  est la limite dans  $\text{Mod}_{\text{qcoh}}(\mathcal{O}_{\mathcal{X}})$  du ind-objet  $\mathcal{H}^0(L_{\Delta})$ ). Plus précisément, si  $\mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Z}$  est un morphisme représentable et lisse, son complexe cotangent peut être calculé de la manière suivante. On choisit une présentation  $Z \rightarrow \mathcal{Z}$  de  $\mathcal{Z}$ , et on note  $Y = \mathcal{Y} \times_{\mathcal{Z}} Z$  l'espace algébrique obtenu par changement de base. Le morphisme  $Y \rightarrow \mathcal{Y}$  est automatiquement une présentation de  $\mathcal{Y}$ . On note  $Y^{\bullet}$  (resp.  $Z^{\bullet}$ ) l'espace algébrique simplicial obtenu en prenant le 0-cosquelette du morphisme  $Y \rightarrow \mathcal{Y}$  (resp.  $Z \rightarrow \mathcal{Z}$ ).

$$\begin{array}{ccc} Y^{\bullet} & \longrightarrow & Z^{\bullet} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{Y} & \longrightarrow & \mathcal{Z} \end{array}$$

À l'étage  $i$ , le morphisme  $Y^i \rightarrow Z^i$  est lisse donc son complexe cotangent est représenté par le  $\mathcal{O}_{Y^i}$ -module quasi-cohérent  $\Omega_{Y^i/Z^i}$  placé en degré 0. Le  $\mathcal{O}_{Y^{\bullet}}$ -module simplicial  $\Omega_{Y^{\bullet}/Z^{\bullet}}$  se descend en un  $\mathcal{O}_{\mathcal{Y}}$ -module quasi-cohérent unique à unique isomorphisme près ([38] (13.5.4) et (13.5.5)), qui n'est autre que  $\Omega_{\mathcal{Y}/\mathcal{Z}}$ . Pour le cas qui nous occupe, on a  $\mathcal{Y} = \text{B}\mathbb{G}_m$  et  $\mathcal{Z} = \text{B}\mathbb{G}_m \times_T \text{B}\mathbb{G}_m$ . Le morphisme  $T \rightarrow \text{B}\mathbb{G}_m$  correspondant au toreur trivial fournit par composition avec le morphisme diagonal une présentation de  $\text{B}\mathbb{G}_m \times_T \text{B}\mathbb{G}_m$ . De plus on a un carré 2-cartésien

$$\begin{array}{ccc} Y = \mathbb{G}_m & \longrightarrow & Z = T \\ \downarrow & \square & \downarrow \\ \text{B}\mathbb{G}_m & \longrightarrow & \text{B}\mathbb{G}_m \times_T \text{B}\mathbb{G}_m \end{array}$$

dont on peut facilement calculer le 0-cosquelette. En effet, on a

$$\begin{aligned} Y^1 &= \mathbb{G}_m \times_{\text{B}\mathbb{G}_m} \mathbb{G}_m \\ &\simeq \mathbb{G}_m \times_T T \times_{\text{B}\mathbb{G}_m} T \times_T \mathbb{G}_m \\ &\simeq \mathbb{G}_m \times_T \mathbb{G}_m \times_T \mathbb{G}_m = (\mathbb{G}_m/T)^3 \end{aligned}$$

puis par récurrence on en déduit  $Y^i \simeq (\mathbb{G}_m/T)^{2i+1}$ . Par ailleurs,

$$\begin{aligned} Z^1 &= T \times_{(\mathbb{B}\mathbb{G}_m \times_T \mathbb{B}\mathbb{G}_m)} T \\ &\simeq (T \times_{(\mathbb{B}\mathbb{G}_m \times_T \mathbb{B}\mathbb{G}_m)} \mathbb{B}\mathbb{G}_m) \times_{\mathbb{B}\mathbb{G}_m} T \\ &\simeq \mathbb{G}_m \times_{\mathbb{B}\mathbb{G}_m} T \\ &\simeq \mathbb{G}_m \times_T (T \times_{\mathbb{B}\mathbb{G}_m} T) \\ &\simeq \mathbb{G}_m \times_T \mathbb{G}_m = (\mathbb{G}_m/T)^2 \end{aligned}$$

puis par récurrence on en déduit  $Z^i \simeq (\mathbb{G}_m/T)^{2i}$ . À l'étage  $i$ , le morphisme  $Y^i \rightarrow Z^i$  s'identifie donc à  $(\mathbb{G}_m/T)^{2i+1} \rightarrow (\mathbb{G}_m/T)^{2i}$ , autrement dit c'est le morphisme structural  $\mathbb{G}_{m,S_i} \rightarrow S_i$  du groupe  $\mathbb{G}_m$  sur la base  $S_i = (\mathbb{G}_m/T)^{2i}$ , et son module des différentielles relatives est canoniquement isomorphe à  $\mathcal{O}_{(\mathbb{G}_m/T)^{2i+1}}$ . En conséquence, le  $\mathcal{O}_{Y^\bullet}$ -module simplicial  $\Omega_{Y^\bullet/Z^\bullet}$  est isomorphe à  $\mathcal{O}_{Y^\bullet}$ , si bien que  $\Omega_{\mathcal{Y}/\mathcal{Z}}$  est isomorphe à  $\mathcal{O}_{\mathcal{Y}}$ , ce qui achève le calcul du complexe cotangent de  $\mathbb{B}\mathbb{G}_m$ .

Maintenant, si  $f$  est un morphisme de  $\mathcal{X}$  dans  $\mathbb{B}\mathbb{G}_m$ , le système projectif  $Lf^*L_{\mathbb{B}\mathbb{G}_m/T}$  est représenté par le complexe  $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}[-1]$  qui a pour seul terme non nul  $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$  situé en degré 1. On en déduit, par définition,

$$\begin{aligned} \mathrm{Ext}^i(Lf^*L_{\mathbb{B}\mathbb{G}_m/T}, I) &= \mathrm{Ext}^i(\mathcal{O}_{\mathcal{X}}[-1], I) \\ &= \mathrm{Hom}_{D_{\mathrm{qcoh}}(\mathcal{O}_{\mathcal{X}})}(\mathcal{O}_{\mathcal{X}}[-1], I[i]) \\ &= \mathrm{Hom}_{D_{\mathrm{qcoh}}(\mathcal{O}_{\mathcal{X}})}(\mathcal{O}_{\mathcal{X}}, I[i+1]) \\ &= \mathrm{Ext}^{i+1}(\mathcal{O}_{\mathcal{X}}, I) \\ &= H^{i+1}(\mathcal{X}, I) \end{aligned}$$

□

Le théorème ci-dessus devient alors :

- Théorème 3.2.5** (1) Il existe un élément  $\omega \in H^2(\mathcal{X}, I)$  dont l'annulation équivaut à l'existence d'une déformation de  $\mathcal{L}$  à  $\widetilde{\mathcal{X}}$ .
- (2) Si  $\omega = 0$ , alors  $\overline{\mathrm{Defm}}(\mathcal{L})$  est un tore sous  $H^1(\mathcal{X}, I)$ .
- (3) Si  $(\widetilde{\mathcal{L}}, \lambda)$  est une déformation de  $\mathcal{L}$ , son groupe d'automorphismes est isomorphe à  $H^0(\mathcal{X}, I)$ .

Comme on peut s'en douter, le théorème (3.2.5), qui n'est qu'un cas particulier de (3.2.3), est en réalité beaucoup plus facile à obtenir que ce dernier. De plus la démonstration du théorème (3.2.3) fait appel à un certain nombre de résultats non triviaux concernant les déformations de morphismes d'espaces algébriques ([33]), les déformations de morphismes représentables de champs algébriques ([46]), les déformations de champs algébriques ([9]) et la théorie du complexe cotangent ([33], [38] et [44]). Il nous a donc paru nécessaire de donner une démonstration directe, et plus élémentaire que celle qui consiste à faire appel à [11], du théorème (3.2.5). Commençons par en démontrer le troisième point (pour mesurer l'ampleur des simplifications, le lecteur pourra comparer avec la démonstration du résultat analogue pour les déformations de morphismes, qui est essentiellement la proposition 2.8 de [11]).

**Démonstration de (3.2.5), (3)** Par définition un automorphisme de  $(\widetilde{\mathcal{L}}, \lambda)$  est un automorphisme  $\varphi$  de  $\widetilde{\mathcal{L}}$  tel que  $i^*\varphi = \mathrm{Id}_{i^*\widetilde{\mathcal{L}}}$ . Autrement dit,  $\mathrm{Aut}_{\mathrm{Defm}(\mathcal{L})}(\widetilde{\mathcal{L}}, \lambda)$  est le

noyau du morphisme  $\text{Aut}(\widetilde{\mathcal{L}}) \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{L})$  induit par  $i^*$ . Or  $\text{Aut}(\widetilde{\mathcal{L}}) = \Gamma(\widetilde{\mathcal{X}}, \mathcal{O}_{\widetilde{\mathcal{X}}})^\times$  et  $\text{Aut}(\mathcal{L}) = \Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{O}_{\mathcal{X}})^\times$ . Donc  $\text{Aut}_{\text{Defm}(\mathcal{L})}(\widetilde{\mathcal{L}}, \lambda)$  est le noyau du morphisme

$$H^0(\widetilde{\mathcal{X}}, \mathcal{O}_{\widetilde{\mathcal{X}}})^\times \longrightarrow \left( \frac{H^0(\widetilde{\mathcal{X}}, \mathcal{O}_{\widetilde{\mathcal{X}}})}{H^0(\widetilde{\mathcal{X}}, I)} \right)^\times.$$

On en déduit d'après le lemme (3.2.1) 2), que le groupe  $\text{Aut}_{\text{Defm}(\mathcal{L})}(\widetilde{\mathcal{L}}, \lambda)$  est isomorphe à  $H^0(\widetilde{\mathcal{X}}, I)$  via l'application  $x \mapsto 1 + x$ .  $\square$

Nous allons en fait donner deux démonstrations des parties (1) et (2) du théorème (3.2.5). La première démonstration proposée ci-dessous est une traduction dans le langage des faisceaux inversibles de la démonstration du théorème 2.1.1 de [11]. Un certain nombre d'arguments se simplifient, voire deviennent inutiles, et les outils invoqués diffèrent sensiblement, mais le canevas sous-jacent est le même :

- prendre une présentation  $X_0$  de  $\mathcal{X}$  et l'espace algébrique simplicial associé à cette présentation ;
- relier les déformations dans la catégorie des champs algébriques à celles dans la catégorie des espaces algébriques simpliciaux ;
- comparer les groupes Ext (dans le cas des morphismes) ou les groupes de cohomologie (dans le cas des faisceaux inversibles).

La seconde démonstration, plus rapide, généralise au cas des champs algébriques l'argumentaire classique valable dans le cadre des espaces algébriques.

**Première démonstration de (3.2.5), (1) et (2) :** Commençons par une remarque générale. Soit  $X^0 \rightarrow \mathcal{X}$  une présentation de  $\mathcal{X}$ . Alors la catégorie des faisceaux inversibles sur  $\mathcal{X}$  est équivalente à la catégorie suivante. Un objet est un couple  $(\mathcal{L}^0, \alpha)$  où  $\mathcal{L}^0$  est un faisceau inversible sur  $X^0$  et  $\alpha : p_1^* \mathcal{L}^0 \xrightarrow{\sim} p_2^* \mathcal{L}^0$  est un isomorphisme tel que, à des isomorphismes canoniques près,  $(p_{23}^* \alpha) \circ (p_{12}^* \alpha) = p_{13}^* \alpha$ . Un (iso)morphisme  $(\mathcal{L}^0, \alpha) \rightarrow (\mathcal{M}^0, \beta)$  est un isomorphisme  $\gamma : \mathcal{L}^0 \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}^0$  tel que  $(p_2^* \gamma) \circ \alpha = \beta \circ (p_1^* \gamma)$ .

On choisit une présentation  $P : X^0 \rightarrow \mathcal{X}$  de  $\mathcal{X}$  telle que  $\mathcal{L}^0 := P^* \mathcal{L}$  soit trivial et telle que  $X^0$  soit union disjointe de schémas affines. D'après le lemme (3.2.6) ci-dessous, il existe alors un morphisme lisse et surjectif  $\widetilde{P} : \widetilde{X}^0 \rightarrow \widetilde{\mathcal{X}}$  et un diagramme 2-cartésien :

$$\begin{array}{ccc} X^0 & \xrightarrow{i_0} & \widetilde{X}^0 \\ P \downarrow & \square & \downarrow \widetilde{P} \\ \mathcal{X} & \xrightarrow{i} & \widetilde{\mathcal{X}}. \end{array}$$

Quitte à prendre une présentation de  $\widetilde{X}^0$ , on peut supposer que  $\widetilde{X}^0$  est union disjointe de schémas affines, et donc que  $i_0$  est une somme disjointe d'immersions fermées entre des schémas affines. Soit  $\alpha : p_1^* \mathcal{L}^0 \xrightarrow{\sim} p_2^* \mathcal{L}^0$  l'isomorphisme correspondant à  $\mathcal{L}$  via l'équivalence de catégories ci-dessus (disons qu'on fixe une fois pour toute une telle équivalence de catégories ainsi qu'un quasi-inverse). Afin d'alléger un peu les notations, on supposera dans la suite que le faisceau  $\mathcal{L}^0$  est *égal*, et non seulement isomorphe, à  $\mathcal{O}_{X^0}$ . (Ceci est un abus clairement inoffensif. En toute rigueur il faudrait choisir une fois pour toute un isomorphisme entre  $\mathcal{O}_{X^0}$  et  $\mathcal{L}^0$  et le transporter tout au long de la démonstration.) On

note alors  $\text{Defm}(\alpha)$  l'ensemble des isomorphismes  $\tilde{\alpha} : p_1^* \mathcal{O}_{\widetilde{X^0}} \xrightarrow{\sim} p_2^* \mathcal{O}_{\widetilde{X^0}}$  tels que

$$\begin{cases} (p_{23}^* \tilde{\alpha}) \circ (p_{12}^* \tilde{\alpha}) = p_{13}^* \tilde{\alpha} \\ \text{et } \tilde{\alpha}|_{X^1} = i_1^* \tilde{\alpha} = \alpha \end{cases}$$

(à des isomorphismes canoniques près, que nous omettrons pour rester lisible), où  $X^1 = X^0 \times_{\mathcal{X}} X^0$ ,  $\widetilde{X^1} = \widetilde{X^0} \times_{\widetilde{\mathcal{X}}} \widetilde{X^0}$ , et  $i_1$  est le morphisme induit  $X^1 \rightarrow \widetilde{X^1}$ .

Il existe alors une application  $A : \text{Defm}(\alpha) \rightarrow \overline{\text{Defm}(\mathcal{L})}$  qui à  $\tilde{\alpha}$  associe la classe du couple  $(\widetilde{\mathcal{L}}, \lambda)$  constitué du faisceau inversible  $\widetilde{\mathcal{L}}$  sur  $\widetilde{\mathcal{X}}$  associé à  $(\mathcal{O}_{\widetilde{X^0}}, \tilde{\alpha})$  via l'équivalence de catégories mentionnée plus haut, et de l'isomorphisme  $\lambda : i^* \widetilde{\mathcal{L}} \rightarrow \mathcal{L}$  induit par l'isomorphisme canonique  $i_0^* \mathcal{O}_{\widetilde{X^0}} \rightarrow \mathcal{O}_{X^0}$ .

• *L'application A ainsi construite est surjective.*

Soit  $(\widetilde{\mathcal{L}}, \lambda)$  une déformation de  $\mathcal{L}$ . Soit  $\widetilde{\mathcal{L}}^0 = \widetilde{P}^* \widetilde{\mathcal{L}}$ . On a un isomorphisme  $P^* \lambda : i_0^* \widetilde{\mathcal{L}}^0 \rightarrow \mathcal{L}^0 = \mathcal{O}_{X^0}$ , donc en vertu du lemme (3.1.5) le faisceau inversible  $\widetilde{\mathcal{L}}^0$  est trivial. On fixe un isomorphisme  $\varphi : \widetilde{\mathcal{L}}^0 \rightarrow \mathcal{O}_{\widetilde{X^0}}$ . Soit  $\tilde{\alpha} : p_1^* \widetilde{\mathcal{L}}^0 \rightarrow p_2^* \widetilde{\mathcal{L}}^0$  l'isomorphisme correspondant à  $\widetilde{\mathcal{L}}$ . On pose  $\widehat{\alpha} = (p_2^* \varphi) \circ \tilde{\alpha} \circ (p_1^* \varphi)^{-1} : p_1^* \mathcal{O}_{\widetilde{X^0}} \rightarrow p_2^* \mathcal{O}_{\widetilde{X^0}}$ . Il est clair que  $\widehat{\alpha}$  appartient à  $\text{Defm}(\alpha)$ . Soit  $A(\widehat{\alpha}) = (\widetilde{\mathcal{L}}, \widehat{\lambda})$  la déformation correspondante. On va montrer que, pour un choix de  $\varphi$  convenable,  $(\widetilde{\mathcal{L}}, \lambda)$  et  $(\widetilde{\mathcal{L}}, \widehat{\lambda})$  sont isomorphes.

L'isomorphisme  $\varphi$ , par définition de  $\widehat{\alpha}$ , fait commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} p_1^* \widetilde{\mathcal{L}}^0 & \xrightarrow{p_1^* \varphi} & p_1^* \mathcal{O}_{\widetilde{X^0}} \\ \tilde{\alpha} \downarrow & & \downarrow \widehat{\alpha} \\ p_2^* \widetilde{\mathcal{L}}^0 & \xrightarrow{p_2^* \varphi} & p_2^* \mathcal{O}_{\widetilde{X^0}} \end{array}$$

donc il induit un isomorphisme  $\widetilde{\mathcal{L}} \xrightarrow{\sim} \widehat{\mathcal{L}}$ . C'est un isomorphisme de déformations si et seulement si  $\widehat{\lambda} \circ i^* \varphi = \lambda$ . Vu la construction de l'isomorphisme  $\widetilde{\mathcal{L}} \xrightarrow{\sim} \widehat{\mathcal{L}}$ , cela revient précisément à exiger que  $i_0^* \varphi = P^* \lambda$ . Or le morphisme de groupes  $\text{Aut}(\mathcal{O}_{\widetilde{X^0}}) \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{O}_{X^0})$  est surjectif en vertu du lemme (3.2.1) 1), donc on peut toujours choisir un tel  $\varphi$ , ce qui prouve notre assertion.

On note maintenant  $K$  le noyau

$$K = \text{Ker} \left( H^0(X^1, I^1) \xrightarrow{p_{23}^* - p_{13}^* + p_{12}^*} H^0(X^2, I^2) \right),$$

où  $X^2 = X^0 \times_{\mathcal{X}} X^0 \times_{\mathcal{X}} X^0$ , et  $I^1, I^2$  sont les images inverses de  $I$  sur  $X^1, X^2$ . Ce groupe agit sur  $\text{Defm}(\alpha)$  de la manière suivante : si  $x \in K$  et  $\tilde{\alpha} \in \text{Defm}(\alpha)$ , on pose

$$x \cdot \tilde{\alpha} = \mu_{1+x} \circ \tilde{\alpha},$$

où  $\mu_{1+x}$  désigne l'automorphisme de  $p_2^* \mathcal{O}_{\widetilde{X^0}}$  de multiplication par  $1+x$ .

• *Muni de cette action,  $\text{Defm}(\alpha)$  est soit vide, soit un tore sous  $K$ .*

On suppose que  $\text{Defm}(\alpha)$  est non vide. C'est alors clairement un tore sous le groupe  $B$  des automorphismes  $\beta \in \text{Aut}(\mathcal{O}_{\widetilde{X^1}})$  tels que  $\beta|_{X^1} = \text{Id}_{\mathcal{O}_{X^1}}$  et  $(p_{23}^* \beta) \circ (p_{12}^* \beta) = p_{13}^* \beta$ . Le lemme (3.2.1), 2) montre que l'application  $x \mapsto 1+x$  induit un isomorphisme de

$H^0(X^1, I^1)$  sur le groupe des  $\beta \in \text{Aut}(\mathcal{O}_{\widetilde{X}^1})$  tels que  $\beta|_{X^1} = \text{Id}_{\mathcal{O}_{X^1}}$ . En considérant sa restriction à  $K$  on obtient un isomorphisme de  $K$  sur  $B$ , d'où le résultat.

On a par ailleurs un morphisme  $D : H^0(X^0, I^0) \xrightarrow{p_1^* - p_2^*} K$ , qui induit donc une action de  $H^0(X^0, I^0)$  sur  $\text{Defm}(\alpha)$ .

- *Les fibres de  $A$  sont les orbites de  $\text{Defm}(\alpha)$  sous  $H^0(X^0, I^0)$ .*

Soient  $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2 \in \text{Defm}(\alpha)$ . Il s'agit de montrer que  $\tilde{\alpha}_1$  et  $\tilde{\alpha}_2$  sont dans la même orbite sous  $H^0(X^0, I^0)$  si et seulement si  $A(\tilde{\alpha}_1) = A(\tilde{\alpha}_2)$ . On note  $(\mathcal{L}_1, \lambda_1), (\mathcal{L}_2, \lambda_2)$  les déformations de  $\mathcal{L}$  associées. Un isomorphisme  $(\mathcal{L}_1, \lambda_1) \rightarrow (\mathcal{L}_2, \lambda_2)$  est un isomorphisme  $\mathcal{L}_1 \xrightarrow{\gamma} \mathcal{L}_2$  tel que  $\lambda_2 \circ i^* \gamma = \lambda_1$ . Un tel isomorphisme correspond à un isomorphisme  $\gamma : \mathcal{O}_{\widetilde{X}^0} \rightarrow \mathcal{O}_{\widetilde{X}^0}$  tel que les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} p_1^* \mathcal{O}_{\widetilde{X}^0} & \xrightarrow{p_1^* \gamma} & p_1^* \mathcal{O}_{\widetilde{X}^0} \\ \tilde{\alpha}_1 \downarrow & & \downarrow \tilde{\alpha}_2 \\ p_2^* \mathcal{O}_{\widetilde{X}^0} & \xrightarrow{p_2^* \gamma} & p_2^* \mathcal{O}_{\widetilde{X}^0} \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} i_0^* \mathcal{O}_{\widetilde{X}^0} & \xrightarrow{i_0^* \gamma} & i_0^* \mathcal{O}_{\widetilde{X}^0} \\ \text{can.} \searrow & & \swarrow \text{can.} \\ \mathcal{L}^0 = \mathcal{O}_{X^0} & & \end{array}$$

commutent. Le second diagramme signifie simplement que  $i_0^* \gamma = \text{Id}_{i_0^* \mathcal{O}_{\widetilde{X}^0}}$ . Cela équivaut encore à dire que  $\gamma$  est de la forme  $\mu_{1+x}$  où  $x \in H^0(X^0, I^0)$ . Donc  $A(\tilde{\alpha}_1) = A(\tilde{\alpha}_2)$  si et seulement s'il existe  $x \in H^0(X^0, I^0)$  tel que  $\tilde{\alpha}_2 = (p_2^* \mu_{1+x}) \circ \tilde{\alpha}_1 \circ (p_1^* \mu_{1+x})^{-1} = (p_2^* x - p_1^* x) \cdot \tilde{\alpha}_1$ , i.e. si et seulement si  $\tilde{\alpha}_1$  et  $\tilde{\alpha}_2$  sont dans la même orbite sous  $H^0(X^0, I^0)$ .

Le fait que  $A$  soit surjective et que ses fibres s'identifient aux orbites de  $\text{Defm}(\alpha)$  (qui, ne l'oublions pas, est soit vide soit un tore sous  $K$ ) sous  $H^0(X^0, I^0)$  montre que, lorsqu'il est non vide,  $\text{Defm}(\mathcal{L})$  est naturellement un tore sous le conoyau du morphisme  $D : H^0(X^0, I^0) \rightarrow K$ . Or, comme  $P : X^0 \rightarrow \mathcal{X}$  est une présentation de  $\mathcal{X}$ , la proposition (A.1.4.1) de l'annexe montre que l'on a une suite spectrale (cf. *loc. cit.* pour les notations) :

$$E_2^{p,q} = \check{H}^p(H^q(X^\bullet, I^\bullet)) \Rightarrow H^{p+q}(\mathcal{X}, I).$$

La suite exacte des termes de bas degré associée à cette suite spectrale est la suivante ([17], chapitre XV, paragraphe 5, p.329) :

$$0 \rightarrow E_2^{1,0} \rightarrow H^1 \rightarrow E_2^{0,1} \rightarrow E_2^{2,0} \rightarrow H^2. \quad (3.1)$$

Or, comme  $X^0$  est union disjointe de schémas affines, le groupe  $H^1(X^0, I^0)$  est trivial, ce qui montre que le terme  $E_2^{0,1}$  de la suite exacte ci-dessus est nul. On obtient donc d'une part une injection de  $\check{H}^2(H^0(X^\bullet, I^\bullet))$  dans  $H^2(\mathcal{X}, I)$ , dont nous nous servirons bientôt, et d'autre part un isomorphisme entre  $H^1(\mathcal{X}, I)$  et  $\check{H}^1(H^0(X^\bullet, I^\bullet))$ . Ce dernier groupe n'étant autre que le conoyau de  $D$ , on en déduit la deuxième assertion du théorème.

- *Classe d'obstruction.*

Vu que  $A$  est surjective,  $\text{Defm}(\mathcal{L})$  est vide si et seulement si  $\text{Defm}(\alpha)$  l'est. Il ne nous reste donc plus qu'à construire un élément  $\omega$  de  $H^2(\mathcal{X}, I)$  dont la nullité caractérise l'existence d'une déformation  $\tilde{\alpha} \in \text{Defm}(\alpha)$ . Or, via l'identification  $\text{Aut}(\mathcal{O}_{\widetilde{X}^0}) \simeq \Gamma(\widetilde{X}^0, \mathcal{O}_{\widetilde{X}^0})^\times$ , chercher un tel  $\tilde{\alpha}$  revient à chercher  $\tilde{\alpha} \in \Gamma(\widetilde{X}^1, \mathcal{O}_{\widetilde{X}^1})^\times$  tel que

$$\begin{cases} i_1^* \tilde{\alpha} = \alpha \in \Gamma(X^1, \mathcal{O}_{X^1})^\times \\ (p_{23}^* \tilde{\alpha})(p_{12}^* \tilde{\alpha})(p_{13}^* \tilde{\alpha})^{-1} = 1 \in \Gamma(\widetilde{X}^2, \mathcal{O}_{\widetilde{X}^2})^\times \end{cases}$$

On rappelle que  $\Gamma(X^1, \mathcal{O}_{X^1}) = \frac{\Gamma(\widetilde{X^1}, \mathcal{O}_{\widetilde{X^1}})}{H^0(X^1, I^1)}$ . Choisissons un antécédent  $\beta \in \Gamma(\widetilde{X^1}, \mathcal{O}_{\widetilde{X^1}})$  de  $\alpha$ . Alors  $\beta$  est automatiquement inversible, et les équations ci-dessus deviennent :

$$\begin{cases} i_1^*(\widetilde{\alpha}\beta^{-1}) = 1 \in \Gamma(X^1, \mathcal{O}_{X^1})^\times \\ (p_{23}^*(\widetilde{\alpha}\beta^{-1}))(p_{12}^*(\widetilde{\alpha}\beta^{-1}))(p_{13}^*(\widetilde{\alpha}\beta^{-1}))^{-1} = (p_{23}^*\beta)(p_{12}^*\beta)(p_{13}^*\beta)^{-1} =: \xi \end{cases}$$

Le fait que  $\alpha$  vérifie la condition de cocycle  $(p_{23}^*\alpha)(p_{12}^*\alpha)(p_{13}^*\alpha)^{-1} = 1$  montre que  $i_2^*\xi = 1$ , ce qui signifie d'après le lemme (3.2.1) que  $\xi$  est de la forme  $1 + u$  avec  $u \in H^0(X^2, I^2)$ . Posant  $\gamma = \widetilde{\alpha}\beta^{-1}$  les équations deviennent

$$\begin{cases} i_1^*\gamma = 1 \in \Gamma(X^1, \mathcal{O}_{X^1})^\times \\ (p_{23}^*\gamma)(p_{12}^*\gamma)(p_{13}^*\gamma)^{-1} = 1 + u \in \Gamma(\widetilde{X^2}, \mathcal{O}_{\widetilde{X^2}})^\times \end{cases}$$

Toujours d'après (3.2.1) l'ensemble des éléments qui vérifient la première équation s'identifie à  $H^0(X^1, I^1)$  via  $x \mapsto \gamma = 1 + x$ . Donc chercher un élément  $\widetilde{\alpha} \in \text{Defm}(\alpha)$  revient à chercher un  $x \in H^0(X^1, I^1)$  tel que  $(p_{23}^* - p_{13}^* + p_{12}^*)x = u$ . Par ailleurs, vu l'expression de  $\xi = (p_{23}^*\beta)(p_{12}^*\beta)(p_{13}^*\beta)^{-1}$ , on a clairement  $(p_{234}^* - p_{134}^* + p_{124}^* - p_{123}^*)u = 0$ . On note alors  $\omega$  la classe de  $u$  dans

$$\check{H}^2(H^0(X^\bullet, I^\bullet)) = \frac{\text{Ker}(p_{234}^* - p_{134}^* + p_{124}^* - p_{123}^*)}{\text{Im}(p_{23}^* - p_{13}^* + p_{12}^*)}.$$

L'injection  $\check{H}^2(H^0(X^\bullet, I^\bullet)) \hookrightarrow H^2(\mathcal{X}, I)$  obtenue ci-dessus à partir de la suite spectrale de descente cohomologique permet de voir  $\omega$  comme un élément de  $H^2(\mathcal{X}, I)$ , et la discussion que nous venons de mener montre que  $\omega = 0$  si et seulement si  $\mathcal{L}$  admet une déformation à  $\widetilde{\mathcal{X}}$ .  $\square$

**Lemme 3.2.6** *Soit  $i : \mathcal{X} \rightarrow \widetilde{\mathcal{X}}$  une immersion fermée de champs algébriques définie par un idéal quasi-cohérent  $I$  de  $\widetilde{\mathcal{X}}$  de carré nul (ou nilpotent). Soit  $P : X^0 \rightarrow \mathcal{X}$  un morphisme lisse, où  $X^0$  est union disjointe de schémas affines. Alors il existe un morphisme lisse de champs algébriques  $\widetilde{P} : \widetilde{X^0} \rightarrow \widetilde{\mathcal{X}}$  et un diagramme 2-cartésien :*

$$\begin{array}{ccc} X^0 & \xrightarrow{i_0} & \widetilde{X^0} \\ P \downarrow & \square & \downarrow \widetilde{P} \\ \mathcal{X} & \xrightarrow{i} & \widetilde{\mathcal{X}}. \end{array}$$

Si de plus  $P$  est surjectif (resp. étale), il en est de même de  $\widetilde{P}$ .

**Démonstration.** D'après [46], thm. 1.4, il existe  $o \in \text{Ext}^2(L_{X^0/\mathcal{X}}, P^*I)$  tel que  $o = 0$  si et seulement s'il existe un diagramme 2-cartésien comme ci-dessus avec  $\widetilde{P}$  plat. Comme  $P$  est lisse, d'après [38], (17.5.8), le complexe cotangent  $L_{X^0/\mathcal{X}}$  est quasi-isomorphe au  $\mathcal{O}_{X^0}$ -module quasi-cohérent  $\Omega_{X^0/\mathcal{X}}^1$ , qui est localement libre de rang fini. On a donc :

$$\begin{aligned} \text{Ext}^i(L_{X^0/\mathcal{X}}, P^*I) &= \text{Ext}^i(\Omega_{X^0/\mathcal{X}}^1, P^*I) \\ &= \text{Ext}^i(\mathcal{O}_{X^0}, (\Omega_{X^0/\mathcal{X}}^1)^\vee \otimes P^*I) \\ &= H^i(X^0, (\Omega_{X^0/\mathcal{X}}^1)^\vee \otimes P^*I) \\ &= 0 \end{aligned}$$

pour  $i > 0$  puisque  $X^0$  est union disjointe de schémas affines. Il reste juste à montrer que  $\tilde{P}$  est lisse, et qu'il est même étale (resp. surjectif) dès que  $P$  l'est. Or  $\tilde{P}$  est représentable d'après [46], lemme (2.1). Par descente fidèlement plate, on peut supposer, quitte à faire un changement de base par une présentation de  $\tilde{\mathcal{X}}$ , que  $\tilde{\mathcal{X}}$  est un espace algébrique. Le résultat découle alors de [9], lemme (2.2.4).  $\square$

**Remarque 3.2.7** En réalité, dans le lemme qui précède,  $\tilde{X}^0$  est automatiquement une union disjointe de schémas affines. Nous n'aurons pas besoin de ce fait par la suite.

La seconde démonstration que nous proposons repose sur une généralisation au cas des champs algébriques des arguments avancés par Artin dans [12]. Elle est plus directe que la précédente dans la mesure où elle ne repose pas sur une réduction au cas des espaces algébriques. Elle nécessite cependant un petit travail technique pour relier la cohomologie des faisceaux abéliens sur  $\mathcal{X}$  et sur  $\tilde{\mathcal{X}}$  (ce qui était trivial lorsque c'étaient des schémas puisqu'ils avaient le même espace topologique sous-jacent).

### Seconde démonstration de (3.2.5), (1) et (2) :

Montrons d'abord que  $\overline{\text{Defm}}(\mathcal{L})$  est isomorphe à l'ensemble  $\text{Pic}_{[\mathcal{L}]}(\tilde{\mathcal{X}})$  des éléments de  $\text{Pic}(\tilde{\mathcal{X}})$  qui sont envoyés sur  $[\mathcal{L}] \in \text{Pic}(\mathcal{X})$ . On a une application naturelle  $\phi : \overline{\text{Defm}}(\mathcal{L}) \rightarrow \text{Pic}_{[\mathcal{L}]}(\tilde{\mathcal{X}})$  qui à une déformation  $(\tilde{\mathcal{L}}, \lambda)$  associe la classe de  $\tilde{\mathcal{L}}$  dans  $\text{Pic}(\tilde{\mathcal{X}})$ . Elle est clairement surjective par définition même de  $\text{Defm}(\mathcal{L})$ . Montrons qu'elle est injective. Soient  $(\tilde{\mathcal{L}}, \lambda)$  et  $(\tilde{\mathcal{M}}, \mu)$  tels que  $[\tilde{\mathcal{L}}] = [\tilde{\mathcal{M}}]$ . Autrement dit, il existe un isomorphisme  $\alpha : \tilde{\mathcal{L}} \rightarrow \tilde{\mathcal{M}}$ . On veut montrer que l'on peut choisir  $\alpha$  de telle sorte que  $i^* \alpha = \mu^{-1} \circ \lambda$ . Il suffit pour cela de voir que le morphisme de groupes  $\text{Aut}(\tilde{\mathcal{L}}) \rightarrow \text{Aut}(i^* \tilde{\mathcal{L}})$  est surjectif : il n'y aura plus alors qu'à corriger  $\alpha$  par un automorphisme convenablement choisi de  $\tilde{\mathcal{L}}$ . Or ce morphisme de groupes s'identifie à  $\text{Aut}(\mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{X}}}) \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{O}_{\mathcal{X}})$ , qui est surjectif en vertu de (3.2.1), 1).

L'ensemble  $\overline{\text{Defm}}(\mathcal{L})$ , qui s'identifie à  $\text{Pic}_{[\mathcal{L}]}(\tilde{\mathcal{X}})$ , est donc naturellement un torseur sous le noyau du morphisme  $\text{Pic}(\tilde{\mathcal{X}}) \rightarrow \text{Pic}(\mathcal{X})$ . Calculons ce noyau. On a une suite exacte de faisceaux quasi-cohérents sur  $\tilde{\mathcal{X}}$  :

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow \mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{X}}} \longrightarrow i_* \mathcal{O}_{\mathcal{X}} \longrightarrow 0.$$

Le morphisme  $\mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{X}}} \rightarrow i_* \mathcal{O}_{\mathcal{X}}$  est donné sur un ouvert lisse-étale  $(U, u)$  de  $\tilde{\mathcal{X}}$  par

$$\Gamma((U, u), \mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{X}}}) \longrightarrow \frac{\Gamma((U, u), \mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{X}}})}{\Gamma((U, u), I)}.$$

Il induit donc d'après (3.2.1) un morphisme surjectif

$$(\Gamma((U, u), \mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{X}}}))^\times \longrightarrow \left( \frac{\Gamma((U, u), \mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{X}}})}{\Gamma((U, u), I)} \right)^\times$$

dont le noyau s'identifie via l'application exponentielle à  $\Gamma((U, u), I)$ . En d'autres termes, on obtient une suite exacte de faisceaux de groupes abéliens sur  $\tilde{\mathcal{X}}$  :

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow \mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{X}}}^\times \longrightarrow i_* \mathcal{O}_{\mathcal{X}}^\times \longrightarrow 0.$$

La suite exacte longue de cohomologie associée nous donne :

$$H^1(\tilde{\mathcal{X}}, I) \longrightarrow H^1(\tilde{\mathcal{X}}, \mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{X}}}^\times) \longrightarrow H^1(\tilde{\mathcal{X}}, i_* \mathcal{O}_{\mathcal{X}}^\times) \longrightarrow H^2(\tilde{\mathcal{X}}, I).$$



Or d'après 1.1.2.4, le groupe  $H^1(\widetilde{\mathcal{X}}, \mathcal{O}_{\widetilde{\mathcal{X}}}^\times)$  est isomorphe à  $\text{Pic}(\widetilde{\mathcal{X}})$ . De plus le lemme A.1.8.1 fourni en annexe montre que  $H^1(\widetilde{\mathcal{X}}, i_* \mathcal{O}_{\mathcal{X}}^\times) \simeq H^1(\mathcal{X}, \mathcal{O}_{\mathcal{X}}^\times) \simeq \text{Pic}(\mathcal{X})$ . Montrons enfin que la première flèche de la suite exacte longue ci-dessus est injective. Il suffit pour cela de voir que le morphisme  $H^0(\widetilde{\mathcal{X}}, \mathcal{O}_{\widetilde{\mathcal{X}}}^\times) \rightarrow H^0(\widetilde{\mathcal{X}}, i_* \mathcal{O}_{\mathcal{X}}^\times)$  est surjectif, ce qui résulte encore du lemme (3.2.1). On obtient donc la suite exacte

$$0 \longrightarrow H^1(\widetilde{\mathcal{X}}, I) \longrightarrow \text{Pic}(\widetilde{\mathcal{X}}) \longrightarrow \text{Pic}(\mathcal{X}) \longrightarrow H^2(\widetilde{\mathcal{X}}, I),$$

ce qui achève notre démonstration.  $\square$

**Remarque 3.2.8** Nous avons montré au passage que le noyau de  $\text{Pic}(\widetilde{\mathcal{X}}) \rightarrow \text{Pic}(\mathcal{X})$  s'identifie à  $H^1(\widetilde{\mathcal{X}}, I)$ .

### 3.3 Lissité et dimension

Soient  $k$  un corps,  $P$  un  $k$ -espace algébrique, et  $x : \text{Spec } k \rightarrow P$  un  $k$ -point de  $P$ . Soit  $k[\varepsilon] = k[X]/(X^2)$ . On note  $i : \text{Spec } k \rightarrow \text{Spec } k[\varepsilon]$  l'immersion fermée définie par le morphisme qui envoie  $\varepsilon$  sur 0. L'espace tangent à  $P$  en  $x$ , noté  $T_x P$  est par définition un  $k$ -espace vectoriel dont l'ensemble sous-jacent est l'ensemble des morphismes de  $\text{Spec } k[\varepsilon]$  vers  $P$  qui induisent  $x$  par composition avec  $i$ . Autrement dit c'est l'ensemble des éléments de  $P(k[\varepsilon])$  qui sont envoyés sur  $x$  par la flèche  $P(k[\varepsilon]) \rightarrow P(k)$  induite par  $i$ , muni d'une structure de  $k$ -espace vectoriel naturelle, que nous n'explicitons pas ici (pour plus de détails, voir [34] (5.11)).

Si  $f : X \rightarrow P$  est un morphisme de  $k$ -espaces algébriques, et si  $x$  est un  $k$ -point de  $X$ , on note  $T_x f : T_x X \rightarrow T_{f(x)} P$  le morphisme naturel :

$$T_x f : \begin{cases} T_x X \rightarrow T_{f(x)} P = \{\psi : \text{Spec } k[\varepsilon] \rightarrow P \mid \psi \circ i = f \circ x\} \\ \varphi \mapsto f \circ \varphi. \end{cases}$$

C'est un morphisme de  $k$ -espaces vectoriels. Nous rappelons ci-dessous quelques résultats bien utiles dans l'étude des espaces tangents.

**Lemme 3.3.1** 1) Soit  $f : X \rightarrow P$  un morphisme formellement lisse (resp. formellement non ramifié, formellement étale) de  $k$ -espaces algébriques et soit  $x : \text{Spec } k \rightarrow X$  un point  $k$ -rationnel de  $X$ . Alors  $T_x f : T_x X \rightarrow T_{f(x)} P$  est surjective (resp. injective, resp. un isomorphisme).

2) Soient  $X$  un  $k$ -espace algébrique localement de type fini,  $x$  un  $k$ -point de  $X$ , et  $L$  une extension de  $k$ . On note  $X_L$  le  $L$ -espace algébrique obtenu par changement de base, et  $x_L$  le point de  $X_L$  induit par  $x$ . Alors le morphisme naturel

$$(T_x X) \otimes_k L \longrightarrow T_{x_L}(X_L)$$

est un isomorphisme.

**Démonstration.** 1) Dire que  $T_x f$  est surjective (resp. injective, resp. un isomorphisme) revient à dire qu'étant donné un diagramme commutatif en traits pleins :

$$\begin{array}{ccc} \text{Spec } k & \xrightarrow{i} & \text{Spec } k[\varepsilon] \\ x \downarrow & \nearrow \varphi & \downarrow \psi \\ X & \xrightarrow{f} & P, \end{array}$$

il existe une (resp. au plus une, resp. une unique) flèche  $\varphi$  en pointillés qui le rend commutatif. Ceci résulte clairement du fait que  $f$  est formellement lisse (resp. formellement non ramifié, formellement étale).

2) D'après [35] II (6.4), il existe un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} & & X' \\ & \nearrow x' & \downarrow f \\ \text{Spec } k & \xrightarrow{x} & X \end{array}$$

où  $X'$  est un schéma affine étale au-dessus de  $X$ . Compte tenu du point précédent, on peut donc supposer que  $X$  est un schéma affine d'anneau  $A$ . Via des identifications bien connues, tout revient à montrer que le morphisme  $\text{Der}_k(A, k) \otimes_k L \rightarrow \text{Der}_k(A, L)$  est un isomorphisme. On note  $\pi : A \rightarrow k$  le morphisme correspondant au point  $x$ . La  $k$ -algèbre  $A$  est de type fini, donc s'écrit  $A = \frac{k[X_1, \dots, X_n]}{(P_1, \dots, P_r)}$ . Si on note  $M : k^n \rightarrow k^r$  l'application linéaire de matrice

$$M = \begin{pmatrix} \pi \left( \frac{\partial P_1}{\partial X_1} \right) & \dots & \pi \left( \frac{\partial P_1}{\partial X_n} \right) \\ \vdots & & \vdots \\ \pi \left( \frac{\partial P_r}{\partial X_1} \right) & \dots & \pi \left( \frac{\partial P_r}{\partial X_n} \right) \end{pmatrix},$$

on voit facilement que  $T_{x_L}(X_L) = \text{Der}_k(A, L) = \text{Hom}_A(\Omega_{A/k}, L)$  s'identifie (fonctoriellement en  $L$ ) au noyau de  $M \otimes_k L$ . La suite exacte

$$0 \longrightarrow T_x X \longrightarrow k^n \xrightarrow{M} k^r$$

induit une suite exacte

$$0 \longrightarrow (T_x X) \otimes_k L \longrightarrow L^n \xrightarrow{M \otimes_k L} L^r$$

ce qui prouve notre assertion.  $\square$

Nous rappelons également le résultat suivant, valable aussi pour un espace algébrique puisqu'un espace algébrique en groupes sur un corps est toujours un schéma.

**Proposition 3.3.2** ([34] 5.13 et 5.14) *Soient  $P$  un  $k$ -schéma en groupes localement de type fini, et  $e$  le  $k$ -point neutre. Alors  $P$  a la même dimension en tout point. De plus cette dimension est inférieure à  $\dim_k(T_e P)$ , et les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (i)  $\dim P = \dim_k(T_e P)$  ;
- (ii)  $P$  est lisse en  $0$  ;
- (iii)  $P$  est lisse.

*Elles sont vérifiées lorsque  $k$  est de caractéristique nulle.*

**Théorème 3.3.3** *Soient  $k$  un corps,  $S = \text{Spec } k$ , et  $\mathcal{X}$  un  $S$ -champ algébrique. On note  $\text{Pic}_{\mathcal{X}/k}$  le foncteur de Picard relatif  $\text{Pic}_{\mathcal{X}/S}(\text{Ét})$  et on suppose qu'il est représentable par un  $S$ -espace algébrique localement de type fini.*

a) *Alors l'espace tangent à l'origine est*

$$T_0 \text{Pic}_{\mathcal{X}/k} = H^1(\mathcal{X}, \mathcal{O}_{\mathcal{X}}).$$

b) *L'espace algébrique  $\text{Pic}_{\mathcal{X}/k}$  a la même dimension en tout point. De plus cette dimension est inférieure à  $\dim_k H^1(\mathcal{X}, \mathcal{O}_{\mathcal{X}})$ , et il y a égalité si et seulement si  $\text{Pic}_{\mathcal{X}/k}$  est lisse à l'origine. Dans ce cas,  $\text{Pic}_{\mathcal{X}/k}$  est lisse de dimension  $\dim_k H^1(\mathcal{X}, \mathcal{O}_{\mathcal{X}})$  partout. Il en est toujours ainsi lorsque  $k$  est de caractéristique nulle.*

**Démonstration.** a) On note encore  $P = \text{Pic}_{\mathcal{X}/k}$ . On rappelle que l'espace tangent à  $P$  en 0 est défini par  $T_0P := \text{Ker}(P(k[\varepsilon]) \rightarrow P(k))$ , où  $k[\varepsilon] = \frac{k[X]}{(X^2)}$ . Il est naturellement muni d'une structure de  $k$ -espace vectoriel. Si l'on pose  $\widetilde{\mathcal{X}} = \mathcal{X} \times_{\text{Spec } k} \text{Spec } k[\varepsilon]$ , alors  $\widetilde{\mathcal{X}}$  est une déformation de  $\mathcal{X}$ . On note  $i : \mathcal{X} \hookrightarrow \widetilde{\mathcal{X}}$  l'injection canonique. On voit facilement que l'idéal  $I$  sur  $\widetilde{\mathcal{X}}$  de carré nul qui définit  $\mathcal{X}$  comme sous-champ fermé de  $\widetilde{\mathcal{X}}$  est isomorphe à  $i_*\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ . La remarque (3.2.8) montre alors que l'on a un isomorphisme naturel

$$\text{Ker}(\text{Pic}(\widetilde{\mathcal{X}}) \rightarrow \text{Pic}(\mathcal{X})) \rightarrow H^1(\widetilde{\mathcal{X}}, i_*\mathcal{O}_{\mathcal{X}}).$$

Or d'après le lemme (A.1.8.1),  $H^1(\widetilde{\mathcal{X}}, i_*\mathcal{O}_{\mathcal{X}})$  est isomorphe à  $H^1(\mathcal{X}, \mathcal{O}_{\mathcal{X}})$ . On a par ailleurs un carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \text{Pic}(\widetilde{\mathcal{X}}) & \longrightarrow & \text{Pic}(\mathcal{X}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ P(k[\varepsilon]) & \longrightarrow & P(k), \end{array}$$

qui induit un morphisme entre les noyaux des flèches horizontales, et donc, d'après ce qui précède, un morphisme  $v : H^1(\mathcal{X}, \mathcal{O}_{\mathcal{X}}) \rightarrow T_0P$ . Montrons que  $v$  est un isomorphisme. Remarquons tout d'abord que si  $k$  est algébriquement clos, les flèches verticales du carré ci-dessus sont des isomorphismes en vertu de (1.2.1.5), de sorte que  $v$  en est un aussi. Passons maintenant au cas général. Soit  $\bar{k}$  une clôture algébrique de  $k$ . Le carré ci-dessus s'envoie alors sur le carré correspondant obtenu après extension du corps de base à  $\bar{k}$ . On en déduit en regardant les noyaux un carré commutatif de  $k$ -espaces vectoriels :

$$\begin{array}{ccc} H^1(\mathcal{X}, \mathcal{O}_{\mathcal{X}}) & \longrightarrow & H^1(\mathcal{X}_{\bar{k}}, \mathcal{O}_{\mathcal{X}_{\bar{k}}}) \\ \downarrow v & & \downarrow \bar{v} \\ T_0P & \longrightarrow & T_0(P_{\bar{k}}). \end{array}$$

Par adjonction ce carré induit le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} H^1(\mathcal{X}, \mathcal{O}_{\mathcal{X}}) \otimes_k \bar{k} & \longrightarrow & H^1(\mathcal{X}_{\bar{k}}, \mathcal{O}_{\mathcal{X}_{\bar{k}}}) \\ \downarrow v \otimes_k \bar{k} & & \downarrow \bar{v} \\ (T_0P) \otimes_k \bar{k} & \longrightarrow & T_0(P_{\bar{k}}). \end{array}$$

Clairement pour montrer que  $v$  est un isomorphisme il suffit de montrer que  $v \otimes_k \bar{k}$  en est un. Or nous avons vu ci-dessus que  $\bar{v}$  en est un. La flèche du haut est un isomorphisme d'après (A.1.7.3), et celle du bas en est un d'après le lemme (3.3.1) ci-dessus. Pour b) il suffit d'appliquer (3.3.2).  $\square$

### 3.4 Représentabilité

**Théorème 3.4.1** *Soient  $S$  un schéma et  $\mathcal{X}$  un  $S$ -champ algébrique propre, plat, de présentation finie et cohomologiquement plat en dimension zéro. Alors le foncteur de Picard relatif  $P = \text{Pic}_{\mathcal{X}/S}$  est représentable par un  $S$ -espace algébrique localement de présentation finie et localement séparé.*

**Démonstration.** On peut évidemment supposer que  $S$  est un schéma affine d'anneau  $R$ . On peut même supposer que  $R$  est de type fini sur  $\mathbb{Z}$  grâce à la proposition (4.18) (ii) de [38]. La question de la représentabilité est locale pour la topologie (*fppf*) sur  $S$  ([13] corollaire (7.2)). On se ramène donc avec la remarque (1.2.2.4) au cas où  $f$  a une section. Dès lors, il résulte du théorème (1.2.3.1) que  $P$  est isomorphe au foncteur de Picard relatif  $P_{\mathcal{X}/S}$ , i.e. que

$$P(S') = \frac{\text{Pic}(\mathcal{X} \times_S S')}{\text{Pic}(S')}.$$

Nous allons maintenant utiliser le théorème (5.3) de [12], et il nous faut pour cela en vérifier les conditions [0'] à [5']. On sait déjà que les conditions [0'] («  $P$  est un faisceau *fppf* »), [1'] («  $P$  est localement de présentation finie »), et [2'] («  $P$  commute aux limites projectives ») sont vérifiées, respectivement d'après (1.2.3.1), (1.4.1.1), et (1.4.2.1). Les conditions de séparation [3'] a) et b) résultent immédiatement du lemme (2.2.1). Il nous reste donc à construire une « théorie des déformations » au sens d'Artin [12] (5.2) et à vérifier les conditions du théorème (5.3) s'y rapportant. Or d'après le corollaire (3.1.4), si  $A \rightarrow A'$  est une extension infinitésimale et  $B \rightarrow A$  un morphisme quelconque, le morphisme canonique

$$P(A' \times_A B) \longrightarrow P(A') \times_{P(A)} P(B) \quad (3.2)$$

est un isomorphisme. On en déduit en utilisant la remarque au bas de la page 47 de [12] que l'on obtient une théorie des déformations pour  $P$  en posant pour tout triplet  $(A_0, M, \xi_0)$ , où  $A_0$  est une  $R$ -algèbre intègre,  $M$  un  $A_0$ -module de type fini, et  $\xi_0 \in P(A_0)$ ,

$$D(A_0, M, \xi_0) = \text{Ker}(P(A_0[M]) \longrightarrow P(A_0)).$$

Ici  $A_0[M]$  désigne la  $A_0$ -algèbre  $A_0 \oplus M$  munie de la multiplication donnée par  $(a_0, m) \cdot (a'_0, m') = (a_0 a'_0, a_0 m' + a'_0 m)$ . (Le  $A_0$ -module  $M$  s'identifie donc à un idéal de carré nul de  $A_0[M]$ .) En utilisant le fait que le morphisme  $\text{Pic}(A_0[M]) \rightarrow \text{Pic}(A_0)$  est un isomorphisme (lemme (3.1.5)), on voit facilement que le noyau de  $P(A_0[M]) \rightarrow P(A_0)$  s'identifie au noyau du morphisme  $\text{Pic}(\mathcal{X}_{A_0[M]}) \rightarrow \text{Pic}(\mathcal{X}_{A_0})$ . D'après la remarque (3.2.8), on obtient donc :

$$D(A_0, M, \xi_0) = H^1(\mathcal{X}_{A_0[M]}, I)$$

où  $I$  est l'idéal de carré nul définissant l'immersion fermée  $\mathcal{X}_{A_0} \rightarrow \mathcal{X}_{A_0[M]}$ . Il est clair que  $I = f_{A_0[M]}^* j_* M \simeq i_* f_{A_0}^* M$ , où les notations sont celles du diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X}_{A_0} & \xrightarrow{i} & \mathcal{X}_{A_0[M]} \\ f_{A_0} \downarrow & & \downarrow f_{A_0[M]} \\ \text{Spec } A_0 & \xrightarrow{j} & \text{Spec } A_0[M]. \end{array}$$

Le lemme (A.1.8.1) nous donne alors :

$$D(A_0, M, \xi_0) = H^1(\mathcal{X}_{A_0}, f_{A_0}^* M).$$

Vérifions maintenant les conditions [4'] a) à [5'] c) portant sur la théorie des déformations ainsi construite. Notons que les conditions [4'] b) et [5'] a) sont automatiquement vérifiées grâce à la bijectivité de (3.2), comme le fait remarquer Artin ([12], page 48).

[4'] a) Il s'agit de vérifier que la formation de  $D(A_0, M, \xi_0)$  « commute avec la localisation en  $A_0$  », et que si  $M$  est un  $A_0$ -module libre de rang 1, alors  $D(A_0, M, \xi_0)$  est

un  $A_0$ -module de type fini. La première assertion résulte de la proposition (A.1.7.3), et la seconde de la finitude de la cohomologie des faisceaux cohérents sur un champ algébrique propre et localement noethérien ([45] théorème (1.2), ou [22]).

[4'] c) Nous devons montrer que si  $A_0$  est une  $R$ -algèbre intègre de type fini, il existe un ouvert non vide  $U$  de  $\text{Spec } A_0$  tel que pour tout point fermé  $s$  dans  $U$  le  $\kappa(s)$ -espace vectoriel  $D(k, M \otimes_{A_0} \kappa(s), \xi_{0s})$  soit isomorphe à  $D(A_0, M, \xi_0) \otimes_{A_0} \kappa(s)$ . En d'autres termes on demande que pour un tel point  $s$ , le morphisme canonique

$$H^1(\mathcal{X}_{A_0}, f_{A_0}^* M) \otimes_{A_0} \kappa(s) \longrightarrow H^1(\mathcal{X}_s, f_s^*(M \otimes_{A_0} \kappa(s))) \quad (3.3)$$

soit un isomorphisme. Montrons d'abord qu'il existe un ouvert non vide de  $\text{Spec } A_0$  sur lequel  $M$  est libre de rang fini. On note  $K$  le corps des fractions de  $A_0$ . Comme  $M$  est de type fini,  $M_K$  est un  $K$ -espace vectoriel de dimension finie. Soient  $(x_1, \dots, x_n)$  des éléments de  $M$  dont les images dans  $M_K$  engendrent  $M_K$ . Soit  $(y_1, \dots, y_n)$  une famille génératrice de  $M$ . Il existe  $f \in A_0$  non nul tel que pour tout  $j$  on puisse écrire  $y_j$  comme combinaison linéaire des  $\frac{x_i}{f}$  dans  $M_K$ . Donc quitte à localiser par  $f$  on peut supposer que la famille  $(x_1, \dots, x_n)$  engendre  $M$ . C'est alors aussitôt une base de  $M$ . En effet, on a un morphisme surjectif  $\varphi : A^n \rightarrow M$  qui induit un isomorphisme  $\varphi_K : A_K^n \rightarrow M_K$ , et le morphisme de localisation  $A^n \rightarrow K^n$  est injectif puisque  $A$  est intègre, donc  $\varphi$  est aussi injectif. Maintenant,  $M$  est libre de rang fini sur  $\text{Spec } A_0$ , donc  $f_{A_0}^* M \simeq (\mathcal{O}_{\mathcal{X} \times_S \text{Spec } A_0})^n$  est cohérent et plat sur  $\text{Spec } A_0$  (car  $f$  est plat). Donc le résultat de Mumford ([43] paragraphe 5) généralisé par Aoki aux champs algébriques ([11], théorème (A.1)) s'applique et il existe un ouvert non vide  $U$  de  $\text{Spec } A_0$  tel que, pour tout point  $s$  de  $U$ , le morphisme (3.3) ci-dessus soit un isomorphisme.

Pour les conditions [5'] b) et [5'] c), on peut reprendre telles quelles les démonstrations proposées dans [12], page 70 dans le cas des espaces algébriques, en utilisant la classe d'obstruction que nous avons construite au théorème (3.2.5).  $\square$

## Chapitre 4

# Composante neutre du foncteur de Picard

### 4.1 Préliminaires

#### 4.1.1 Composante des fibres le long d'une section

**Lemme 4.1.1.1** *Soient  $k$  un corps,  $X$  un  $k$ -schéma connexe localement de type fini,  $L$  une extension de  $k$  et  $p$  la projection de  $X_L$  dans  $X$ . Alors les fibres de  $p$  rencontrent toutes les composantes connexes de  $X_L$ . Autrement dit, pour toute composante connexe  $U$  de  $X_L$ , le morphisme induit  $p|_U : U \rightarrow X$  est surjectif.*

**Démonstration.** En dévissant l'extension, il suffit clairement de traiter le cas d'une extension algébrique et le cas d'une extension transcendante pure. Dans le premier cas, le morphisme  $\text{Spec } L \rightarrow \text{Spec } k$  est universellement ouvert ([29] 2.4.9) et universellement fermé ([27] 6.1.10). Si  $U$  est une composante connexe de  $X_L$ , son image  $p(U)$  dans  $X$  est ouverte, fermée et non vide, donc c'est  $X$  tout entier.

Supposons maintenant l'extension  $L/k$  transcendante pure. Si  $\Omega$  est une autre extension de  $k$ , alors l'anneau  $L \otimes_k \Omega$  est intègre. En effet, en écrivant  $L = k(\underline{T})$ , où  $\underline{T}$  est une famille d'indéterminées, on voit que  $L \otimes_k \Omega$  est isomorphe à  $S^{-1}\Omega[\underline{T}]$  avec  $S = k[\underline{T}]$ . Il en résulte que les fibres de  $p$  sont géométriquement intègres. Notons  $(X_i)_{i \in I}$  la famille des composantes connexes de  $X_L$ . Vu que les fibres de  $p$  sont connexes, chaque  $X_i$  est une réunion de fibres. Donc les  $p(X_i)$  forment une partition de  $X$ , et ils sont ouverts puisque  $p$  est ouvert. Par connexité un seul d'entre eux est non vide, donc  $X_L$  est connexe.  $\square$

**Lemme 4.1.1.2** *Soit*

$$\begin{array}{ccc} & & X \\ & \nearrow e & \downarrow f \\ S' & \xrightarrow{g} & S \end{array}$$

*un diagramme commutatif de schémas. On suppose que  $f$  est lisse et quasi-compact, et que  $g$  est universellement ouvert. Alors il existe un unique ouvert  $U$  de  $X$  tel que pour tout  $s \in S$ ,  $U_s$  soit la réunion des composantes connexes de  $X_s$  qui rencontrent  $e(S')$ .*

**Démonstration.** On note  $X'$  le produit fibré  $X \times_S S'$  et  $e' : S' \rightarrow X'$  la section induite par  $e$ . D'après [30] (15.6.5), on a un ouvert  $U'$  de  $X'$  tel que pour tout  $s' \in S'$ , la fibre de

$U'$  au-dessus de  $s'$  soit la composante connexe de  $X'_{s'}$  contenant  $e'(s')$ . Soit  $U$  l'image de  $U'$  dans  $X$ . C'est un ouvert de  $X$  puisque  $g$  est universellement ouvert.

Si  $s$  est un point de  $S$ , il est clair que la fibre  $U_s$  est l'image de  $U'_s$  par le morphisme  $X'_s \rightarrow X_s$  obtenu par changement de base. Donc pour montrer que  $U$  vérifie la propriété annoncée, on peut supposer que  $S$  est le spectre d'un corps  $k$ . Pour tout  $s' \in S'$ , la fibre  $U'_{s'}$  est connexe et contient  $e'(s')$ , de sorte que son image dans  $X$  est incluse dans la composante connexe de  $e(s')$ . Comme  $U$  est la réunion des images des  $U'_{s'}$ , on en déduit que  $U$  est inclus dans la réunion des composantes connexes de  $X$  qui rencontrent  $e(S')$ . Réciproquement, étant donné un point  $s'$  de  $S'$  et un point  $x$  de  $X$  qui est dans la composante connexe de  $e(s')$ , montrons que  $x$  appartient à  $U$ . Notons  $C'$  la composante connexe de  $X'_{s'}$  qui contient  $e'(s')$ , et  $C$  la composante connexe de  $e(s')$  dans  $X$ . D'après le lemme (4.1.1.1), le morphisme induit de  $C'$  vers  $C$  est surjectif. En particulier  $x$  appartient à l'image de  $C'$ , donc à  $U$ .

L'unicité de  $U$  est claire, puisque l'ensemble sous-jacent à  $U$  est déterminé de manière unique par ses fibres.  $\square$

**Remarque 4.1.1.3** Dans le lemme précédent, pour tout  $s \in S$ ,  $X_s$  est lisse sur  $\kappa(s)$  donc ses composantes connexes sont irréductibles. On en déduit que si  $S'$  est un ouvert de  $X$ , alors  $U_s$  est l'adhérence de  $S'_s$  dans  $X_s$ .

**Remarque 4.1.1.4** L'hypothèse de quasi-compacité sur  $f$  n'est pas nécessaire. Elle est cependant présente dans l'énoncé [30] (15.6.5), et c'est le seul endroit où nous l'utilisons. Nous allons nous en affranchir dans le lemme (4.1.1.5) ci-dessous. Ceci prouve en particulier, en reprenant la démonstration du lemme (4.1.1.2) et en y remplaçant « D'après [30] (15.6.5) » par « D'après le lemme (4.1.1.5) », que l'énoncé (4.1.1.2) est encore valable même lorsque  $f$  n'est plus supposé quasi-compact.

**Lemme 4.1.1.5** Soient  $S$  un schéma et  $X$  un espace algébrique lisse sur  $S$  muni d'une section  $e : S \rightarrow X$ . Alors il existe un sous-espace algébrique ouvert de  $X$ , noté  $U(X/S)$ , tel que pour tout  $s \in S$ , la fibre de  $U(X/S)$  au-dessus de  $s$  soit la composante connexe de  $e(s)$  dans  $X_s$ .

**Démonstration.** Il suffit de traiter le cas où  $S$  est quasi-compact. On note  $f : X \rightarrow S$  le morphisme structural de  $X$ . Soit  $\pi$  un morphisme étale d'un schéma quasi-compact  $X_1$  vers  $X$  tel que le morphisme composé  $f \circ \pi$  soit surjectif. On note  $S_1$  le produit fibré  $S \times_{e, X, \pi} X_1$ . Le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} & & X_1 \\ & \nearrow e' & \downarrow f \circ \pi \\ S_1 & \longrightarrow & S \end{array}$$

vérifie bien les hypothèses du lemme (4.1.1.2), donc il existe un ouvert  $U_1$  de  $X_1$  tel que pour tout  $s \in S$ ,  $U_{1s}$  soit la réunion des composantes connexes de  $X_{1s}$  qui rencontrent  $e'(S_1)$ . On note  $U$  l'image de  $U_1$  par  $\pi$  (c'est un ouvert de  $X$ ), puis  $V_1$  l'image réciproque de  $U$  par  $\pi$  (c'est un ouvert de  $X_1$ ). Autrement dit  $V_1$  est le saturé de  $U_1$  pour la relation d'équivalence définie par  $\pi$ . On applique maintenant le lemme (4.1.1.2) au diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} & & X_1 \\ & \nearrow & \downarrow f \circ \pi \\ V_1 & \longrightarrow & S \end{array}$$

et on obtient ainsi un ouvert  $W_1$  de  $X_1$  tel que, pour tout  $s \in S$ ,  $W_{1s}$  soit la réunion des composantes connexes de  $X_{1s}$  qui rencontrent  $V_{1s}$ , c'est-à-dire l'adhérence de  $V_{1s}$  dans  $X_{1s}$  (cf. remarque (4.1.1.3)). On note maintenant  $W$  l'image de  $W_1$  par  $\pi$ . C'est un ouvert de  $X$ .

Notons  $C_s$  la composante connexe de  $X_s$  qui contient  $e(s)$ . L'ouvert  $U_{1s}$  est la réunion des composantes connexes de  $X_{1s}$  qui rencontrent  $e'(S_{1s})$ . Donc son image  $U_s$  est une réunion de parties connexes qui contiennent  $e(s)$ . En particulier  $U_s$  est inclus dans  $C_s$ . De plus  $U_s$  est non vide car tout point de  $S$  est dans l'image de  $X_1$ . Comme  $C_s$  est irréductible (puisque  $X_s$  est lisse), on a  $C_s = \overline{U_s} = \overline{\pi_s(V_{1s})}$ .

Par ailleurs, on a la suite d'inclusions et d'égalités ensemblistes suivante :

$$\begin{aligned}
 \pi_s^{-1}(W_s) &= \pi_s^{-1}(\pi_s(W_{1s})) \\
 &= \pi_s^{-1}(\pi_s(\overline{V_{1s}})) \quad \text{par construction de } W_{1s} \\
 &\subset \pi_s^{-1}(\overline{\pi_s(V_{1s})}) \quad \text{par continuité de } \pi_s \\
 &\subset \overline{\pi_s^{-1}(\pi_s(V_{1s}))} \quad \text{parce que } \pi_s \text{ est un morphisme ouvert} \\
 &= \overline{V_{1s}} \\
 &= W_{1s} \\
 &\subset \pi_s^{-1}(W_s).
 \end{aligned}$$

D'où l'égalité entre  $\pi_s^{-1}(W_s)$  et  $\pi_s^{-1}(\overline{\pi_s(V_{1s})})$ , qui peut encore s'écrire :

$$W_s = \pi_s(X_{1s}) \cap C_s.$$

Maintenant, soit  $(\pi_i : X_i \rightarrow X)_{i \in I}$  une famille couvrante étale, où les  $X_i$  sont des schémas affines et où chacun des morphismes composés  $f \circ \pi_i$  est surjectif (c'est possible : il suffit de veiller à ce que chacun des  $X_i$  recouvre l'image, quasi-compacte, de la section  $e$  dans  $X$ ). Pour chaque  $i \in I$ , on note  $W_i$  l'ouvert de  $X$  obtenu par la construction précédente. Soit  $U(X/S)$  la réunion des  $W_i$ . Il est clair que pour tout  $s \in S$ , la fibre de  $U(X/S)$  au-dessus de  $s$  est égale à  $C_s$ .  $\square$

**Remarque 4.1.1.6** Comme sous-foncteur de  $X$ , l'ouvert  $U = U(X/S)$  est caractérisé par la propriété suivante. Pour tout  $S$ -schéma  $T$  et pour tout  $\xi \in X(T)$ ,  $\xi$  appartient à  $U(T)$  si et seulement si pour tout  $s \in S$ , le point  $\xi_s \in X_s(T_s)$  obtenu par changement de base appartient à  $C_s(T_s)$ , autrement dit le morphisme correspondant  $T_s \rightarrow X_s$  se factorise par  $C_s$ . La vérification est immédiate et laissée au lecteur. En particulier on voit que la propriété vérifiée par les fibres détermine  $U(X/S)$  de manière unique.

**Remarque 4.1.1.7** La formation de  $U(X/S)$  commute à tout changement de base. En effet, soit  $S' \rightarrow S$  un morphisme de changement de base. Notons  $U = U(X/S)$ ,  $X' = X \times_S S'$ ,  $U' = U \times_S S'$ , et  $e' : S' \rightarrow X'$  la section obtenue par changement de base. D'après la remarque précédente il suffit de montrer que pour tout point  $s'$  de  $S'$ , la fibre  $U'_{s'}$  est la composante connexe de  $X'_{s'}$  contenant  $e'(s')$ . Soient  $s'$  un point de  $S'$  et  $s$  son image dans  $S$ . On a un diagramme commutatif à carrés cartésiens :

$$\begin{array}{ccccc}
 U'_{s'} & \longrightarrow & X'_{s'} & \longrightarrow & \text{Spec } \kappa(s') \\
 \downarrow & & \downarrow p & & \downarrow \\
 U_s & \longrightarrow & X_s & \longrightarrow & \text{Spec } \kappa(s).
 \end{array}$$



L'ouvert  $U_s$  est un  $\kappa(s)$ -schéma connexe qui a un  $\kappa(s)$ -point, donc d'après [29] 4.5.13 il est géométriquement connexe. En particulier  $U'_{s'}$  est connexe, et comme il contient  $e'(s')$  il est inclus dans la composante connexe  $C'_{s'}$  de  $e'(s')$ . D'autre part,  $C'_{s'}$  est connexe donc son image aussi et elle contient  $e(s)$ , donc  $p(C'_{s'})$  est inclus dans  $C_s$ , ou, ce qui revient au même,  $C'_{s'}$  est inclus dans  $p^{-1}(U_s) = U'_{s'}$ .

#### 4.1.2 Cohomologie à coefficients dans $\mathbb{Z}$ des champs normaux

Le but du présent paragraphe est de démontrer le résultat suivant, qui nous sera utile pour ramener, lorsque  $S$  est le spectre d'un corps, l'étude de la propriété de  $\text{Pic}^0_{\mathcal{X}/S}$  au cas où  $\mathcal{X}$  est un schéma.

**Théorème 4.1.2.1** *Soit  $\mathcal{X}$  un champ algébrique localement noethérien et normal. Alors  $H^1(\mathcal{X}, \mathbb{Z}) = 0$ .*

Nous allons pour cela montrer que tout  $\mathbb{Z}$ -torseur sur  $\mathcal{X}$  est trivial. Notre démarche est fortement inspirée de l'étude des préschémas constants tordus quasi-isotriviaux proposée dans SGA3 ([1] exposé X, paragraphe 5).

**Lemme 4.1.2.2** *Soit  $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  un morphisme représentable de  $S$ -champs algébriques. Soit  $y$  un point de l'espace topologique  $|\mathcal{Y}|$  sous-jacent à  $\mathcal{Y}$ . Les propositions suivantes sont équivalentes :*

- (i) *Pour un représentant  $\text{Spec } K \rightarrow \mathcal{Y}$  de  $y$ , le morphisme  $f_K$  induit par changement de base de  $\mathcal{X}_K = \mathcal{X} \times_{\mathcal{Y}} \text{Spec } K$  vers  $\text{Spec } K$  est fini.*
- (ii) *Pour tout représentant  $\text{Spec } K \rightarrow \mathcal{Y}$  de  $y$ , le morphisme  $f_K$  est fini.*

*Lorsqu'elles sont vérifiées, on dit que  $f_y : \mathcal{X}_y \rightarrow y$  est fini, ou encore que  $\mathcal{X}_y$  est fini.*

**Démonstration.** Il suffit clairement de montrer que si  $L$  est une extension de  $K$  et si  $f_L$  est fini, alors  $f_K$  est fini. Or si  $f_L$  est fini,  $\mathcal{X}_L$  est un schéma affine, et  $\mathcal{X}_K$  aussi par descente *fpqc* pour les morphismes affines. Maintenant la descente fidèlement plate pour les morphismes finis de schémas ([29] (2.7.1)) assure que  $f_K$  est fini.  $\square$

Le lemme suivant généralise le lemme 5.13 de [1], exposé X.

**Lemme 4.1.2.3** *Soit  $p : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{X}$  un morphisme représentable de  $S$ -champs algébriques, avec  $\mathcal{X}$  localement noethérien. On suppose qu'il existe une présentation  $X \rightarrow \mathcal{X}$  de  $\mathcal{X}$  telle que  $P = \mathcal{P} \times_{\mathcal{X}} X$  soit une union disjointe de copies de  $X$ . Soit  $\mathcal{C}$  un sous-champ ouvert et fermé de  $\mathcal{P}$ . Alors l'ensemble des points  $x$  de  $|\mathcal{X}|$  tels que  $\mathcal{C}_x$  soit fini est ouvert et fermé dans  $|\mathcal{X}|$ . Si on note  $\mathcal{U}$  le sous-champ ouvert et fermé que cet ensemble définit, le champ  $\mathcal{C}_{\mathcal{U}} = \mathcal{C} \times_{\mathcal{X}} \mathcal{U}$  est fini sur  $\mathcal{U}$ .*

**Démonstration.** Notons  $C$  le sous-espace algébrique ouvert et fermé de  $P$  obtenu par changement de base à partir de  $\mathcal{C}$ . Les propriétés que l'on veut montrer sont clairement de nature locale pour la topologie lisse sur  $\mathcal{X}$ , donc il suffit de montrer qu'elles sont vérifiées par  $C \rightarrow P \rightarrow X$ . Comme  $X$  est lui aussi localement noethérien, ses composantes connexes sont ouvertes et fermées donc on peut supposer que  $X$  est un schéma connexe. Dans ce cas, vu que  $P$  est une union disjointe de copies de  $X$ , le sous-schéma ouvert et fermé  $C$  est lui-même l'union disjointe de certaines de ces copies. Si elles sont en nombre fini alors  $C$  est fini sur  $X$ , sinon l'ensemble des points  $x$  de  $X$  où  $C_x$  est fini est vide.  $\square$

**Démonstration du théorème 4.1.2.1** Nous allons utiliser la description du premier groupe de cohomologie en termes de toreseurs (cf. paragraphe A.1.10). Il suffit en vertu

de (A.1.10.2) de montrer que tout  $\mathbb{Z}$ -torseur sur  $\mathcal{X}$  au sens de (A.1.10.1) est trivial. Le cas où  $\mathcal{X}$  est le spectre d'un corps est bien connu et nous nous en servons par la suite. Remarquons tout d'abord que dans tous les champs algébriques (*a fortiori* tous les schémas ou espaces algébriques) qui vont intervenir au cours de la démonstration, les composantes connexes sont irréductibles. En effet, ils seront tous normaux et localement noethériens car ce sont là des propriétés de nature locale pour la topologie lisse. Notre affirmation résulte alors de la proposition 4.13 de [38].

Donnons-nous donc un  $\mathbb{Z}$ -torseur sur  $\mathcal{X}$ , c'est-à-dire un morphisme  $p : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{X}$  représentable et lisse muni d'une action de  $\mathbb{Z}$  qui en fait un toseur. Pour montrer que  $\mathcal{P}$  est trivial, on peut supposer  $\mathcal{X}$  connexe donc irréductible. Soit  $\mathcal{C}$  une composante connexe de  $\mathcal{P}$ . Notons  $\eta$  le point générique de l'espace  $|\mathcal{X}|$  sous-jacent à  $\mathcal{X}$ .

- *La fibre générique  $\mathcal{C}_\eta$  est finie.*

Soit  $u : U \rightarrow \mathcal{X}$  un morphisme lisse, où  $U$  est un schéma affine irréductible (donc intègre, puisque  $U$  est normal). On note  $s$  le point générique de  $U$  et on adopte encore les notations du diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathcal{C}_s & \longrightarrow & \mathcal{C}_U & \longrightarrow & \mathcal{C} \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \mathcal{P}_s & \longrightarrow & \mathcal{P}_U & \longrightarrow & \mathcal{P} \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow p \\
 \text{Spec } \kappa(s) & \longrightarrow & U & \xrightarrow{u} & \mathcal{X}.
 \end{array}$$

Notons  $(\mathcal{C}_i)_{i \in I}$  les composantes connexes de  $\mathcal{C}_U$  et pour chaque  $i \in I$  notons  $\eta_i$  le point générique de  $|\mathcal{C}_i|$ . Notons enfin  $\xi$  le point générique de  $|\mathcal{C}|$  et  $\text{Spec } K \rightarrow \mathcal{C}$  l'un de ses représentants. Pour tout  $i$  le morphisme de  $\mathcal{C}_i$  vers  $\mathcal{C}$  est lisse donc générisant ([38] (5.8)) si bien qu'il envoie le point  $\eta_i$  sur  $\xi$ . On en déduit (cf. par exemple [38] (5.4) (iv)) que le champ  $\mathcal{C}_{i,K} = \mathcal{C}_i \times_{\mathcal{C}} \text{Spec } K$  est non vide. Maintenant, les  $|\mathcal{C}_{i,K}|$  forment une partition ouverte de  $|\mathcal{C}_{U,K}|$ , où  $\mathcal{C}_{U,K}$  est le produit fibré  $\mathcal{C}_U \times_{\mathcal{C}} \text{Spec } K$ . Or le champ

$$\mathcal{C}_{U,K} = U \times_{\mathcal{X}} \text{Spec } K$$

est quasi-compact car  $\mathcal{X}$  est quasi-séparé donc les  $|\mathcal{C}_{i,K}|$  sont en nombre fini et finalement  $\mathcal{C}_U$  n'a qu'un nombre fini de composantes connexes.

Par ailleurs, pour chaque  $i$  le morphisme naturel de  $\mathcal{C}_i$  vers  $U$  est lui aussi générisant donc il envoie  $\eta_i$  sur  $s$ . En particulier sa fibre générique est irréductible donc  $\mathcal{C}_s$  est une union finie d'irréductibles. Comme  $\mathcal{P}_s$  est un  $\mathbb{Z}$ -torseur sur un corps, il est nécessairement trivial, donc  $\mathcal{C}_s$  est une union disjointe finie de copies de  $\text{Spec } \kappa(s)$ . Or le morphisme de  $\text{Spec } \kappa(s)$  vers  $\mathcal{X}$  est un représentant de  $\eta$  donc  $\mathcal{C}_\eta$  est fini.

- *Montrons que  $\mathcal{C}$  est fini.*

D'après le lemme (4.1.2.3), l'ensemble des points  $x$  de  $|\mathcal{X}|$  où  $\mathcal{C}_x$  est fini est ouvert et fermé dans  $|\mathcal{X}|$ . Or il est non vide puisqu'il contient  $\eta$ , donc par connexité c'est  $|\mathcal{X}|$  tout entier. Le même lemme prouve alors que le morphisme de  $\mathcal{C}$  vers  $\mathcal{X}$  est fini.

- *Montrons que  $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{X}$  est étale.*

Il s'agit d'un morphisme fini. En particulier il est schématique. Notre assertion résulte alors du fait qu'un morphisme fini et lisse de schémas est étale ([5] II 1.4).

- *Montrons que  $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{X}$  est radiciel.*

Supposons qu'il existe un corps  $K$  et un morphisme  $\text{Spec } K \rightarrow \mathcal{X}$  tel que le schéma  $\mathcal{C}_K$

obtenu par changement de base contienne au moins deux points  $x_1$  et  $x_2$ . Notons  $c_1$  et  $c_2$  leurs images dans  $|\mathcal{C}| \subset |\mathcal{P}|$ . Soit  $n$  l'unique élément de  $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$  tel que l'automorphisme  $\tau_n$  correspondant envoie  $x_1$  sur  $x_2$ . On note encore  $\tau_n$  l'automorphisme de  $|\mathcal{P}|$  qui correspond à  $n$ . Il est clair qu'il envoie  $c_1$  sur  $c_2$ . Or  $\tau_n(|\mathcal{C}|)$  est un connexe qui contient  $c_2$  donc il est inclus dans la composante connexe de  $c_2$ , à savoir  $|\mathcal{C}|$ . On montre de même que  $\tau_n^{-1}(|\mathcal{C}|)$  est inclus dans  $|\mathcal{C}|$  donc  $\tau_n$  induit un automorphisme de  $|\mathcal{C}|$  et tous les  $\tau_n^k(c_1)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , sont dans  $|\mathcal{C}|$ . Donc tous les  $\tau_n^k(x_1)$  sont dans l'ouvert  $\mathcal{C}_K$  de  $\mathcal{P}_K$ , ce qui contredit le fait qu'il est de type fini.

• *Conclusion.*

Le morphisme de  $\mathcal{C}$  vers  $\mathcal{X}$  est schématique, étale, radiciel et de type fini donc par [5] I 5.1 c'est une immersion ouverte. De plus il est aussi fermé puisqu'il est fini donc par connexité de  $\mathcal{X}$  il est surjectif. Ceci prouve que c'est un isomorphisme, donc le torseur  $\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{X}$  est trivial.  $\square$

## 4.2 La composante connexe de l'identité

On rappelle le résultat suivant concernant la composante neutre d'un  $k$ -schéma en groupes localement de type fini.

**Théorème 4.2.1 ([34] 5.1)** *Soient  $k$  un corps et  $G$  un  $k$ -schéma en groupes localement de type fini. Alors  $G$  est séparé. Soit  $G^0$  la composante connexe de l'élément neutre de  $G$ . Alors  $G^0$  est un sous-schéma en groupes ouvert et fermé de  $G$ . Il est de type fini et géométriquement irréductible. De plus, la formation de  $G^0$  commute aux extensions du corps  $k$ .*

Naturellement, tout ceci est valable pour le foncteur de Picard  $\text{Pic}_{\mathcal{X}/k}$  dès qu'il est représentable par un espace algébrique localement de type fini sur  $k$ . En effet, c'est alors automatiquement un schéma en vertu d'un lemme d'Artin ([12] lemme 4.2 p. 43). En particulier, c'est le cas dès que  $\mathcal{X}$  est un champ algébrique propre et cohomologiquement plat en dimension zéro sur  $k$  (théorème (3.4.1)).

On sait que si  $\mathcal{X}$  est un schéma propre et géométriquement normal sur un corps, alors la composante neutre du groupe de Picard est propre (voir par exemple [34] théorème 5.4). Le théorème suivant généralise ce résultat au cas où  $\mathcal{X}$  est un champ algébrique.

**Théorème 4.2.2** *On suppose que  $\mathcal{X}$  est un champ algébrique propre, géométriquement normal et cohomologiquement plat en dimension zéro sur  $\text{Spec } k$ . Alors la composante neutre  $\text{Pic}_{\mathcal{X}/k}^0$  du schéma de Picard est propre sur  $k$ .*

**Démonstration.** Si  $\bar{k}$  est une clôture algébrique de  $k$  alors le champ  $\mathcal{X}_{\bar{k}}$  obtenu par changement de base est normal d'après [29] (6.7.7). Il vérifie clairement les autres hypothèses du théorème donc par descente fidèlement plate on peut supposer le corps  $k$  algébriquement clos.

Il suffit (cf. argumentaire de Kleiman au cours de la démonstration du théorème 5.4 de [34]) de montrer que tout morphisme de schémas de  $G$  vers  $\text{Pic}_{\mathcal{X}/k}$  est constant, avec  $G = \mathbb{G}_a$  ou  $G = \mathbb{G}_m$ . (En fait il suffirait même de le faire pour  $\mathbb{G}_m$  puisqu'alors c'est aussi vrai pour  $G = \mathbb{G}_a$ , mais cette restriction n'apporte pas grand-chose.) En effet, il suffit de montrer que le réduit  $(\text{Pic}_{\mathcal{X}/k}^0)_{\text{réd}}$  est propre, or ce dernier est lisse donc on peut lui appliquer le théorème de structure de Chevalley et Rosenlicht (cf. par exemple [19], théorème 1.1). On en déduit que  $(\text{Pic}_{\mathcal{X}/k}^0)_{\text{réd}}$  a un sous-groupe algébrique linéaire  $H$ , fermé et

distingué dans  $(\mathrm{Pic}_{\mathcal{X}/k}^0)_{\mathrm{red}}$ , tel que le quotient  $(\mathrm{Pic}_{\mathcal{X}/k}^0)_{\mathrm{red}}/H$  soit une variété abélienne. Il suffit de montrer que  $H$  est trivial. Le groupe  $H$  est commutatif donc résoluble. Il est dès lors triangulable d'après le théorème de Lie-Kolchin. On en déduit que s'il était non trivial, il contiendrait un sous-groupe isomorphe à  $\mathbb{G}_m$  ou  $\mathbb{G}_a$  (voir par exemple le livre de Springer [48], lemme 6.3.4).

Vu que  $f$  a une section, et vu que les groupes de Picard de  $\mathrm{Spec} k$  et de  $G$  sont triviaux, dire que tout morphisme de schémas de  $G$  vers  $\mathrm{Pic}_{\mathcal{X}/k}$  est constant revient à dire, grâce au théorème (1.2.3.1), que le morphisme naturel

$$\mathrm{Pic}(\mathcal{X}) \longrightarrow \mathrm{Pic}(\mathcal{X} \times G)$$

est un isomorphisme. La suite exacte des termes de bas degré associée à la suite spectrale de Leray du morphisme  $p : \mathcal{X} \times G \rightarrow \mathcal{X}$  s'écrit :

$$0 \longrightarrow H^1(\mathcal{X}, p_*\mathbb{G}_m) \longrightarrow H^1(\mathcal{X} \times G, \mathbb{G}_m) \longrightarrow H^0(\mathcal{X}, R^1p_*\mathbb{G}_m).$$

Commençons par montrer que le faisceau  $R^1p_*\mathbb{G}_m$  est nul. On sait d'après le calcul des images directes supérieures effectué en annexe, que c'est le faisceau associé au préfaisceau qui à tout ouvert lisse-étale  $(U, u)$  de  $\mathcal{X}$  associe  $H^1(U \times G, \mathbb{G}_m)$ . Donc d'après le lemme (A.1.8.2) il suffit de montrer que pour tout schéma affine  $U$  lisse sur  $\mathcal{X}$  et pour tout  $\xi \in H^1(U \times G, \mathbb{G}_m)$ , il existe une famille couvrante étale  $V \rightarrow U$  telle que l'élément  $\xi|_V$  de  $H^1(V \times G, \mathbb{G}_m)$  soit nul. Mais pour démontrer ceci il suffit clairement de savoir que le morphisme  $\mathrm{Pic}(U) \rightarrow \mathrm{Pic}(U \times G)$  est surjectif. Nous sommes donc ramenés à montrer que si  $U$  est un schéma affine normal (que l'on peut aussi supposer intègre, vu que  $U$  est de toute manière somme disjointe finie de schémas intègres) sur  $\mathrm{Spec} k$ , alors  $\mathrm{Pic}(U \times G)$  s'identifie à  $\mathrm{Pic}(U)$ . Ce fait est démontré par Kleiman dans [34], au cours de la démonstration du théorème (5.4).

Calculons maintenant le faisceau  $p_*\mathbb{G}_m$ . Considérons d'abord le cas où  $G = \mathbb{G}_m$ . Nous allons montrer que  $p_*\mathbb{G}_m$  s'identifie à  $\mathbb{G}_m \times \mathbb{Z}$ . Il suffit bien évidemment de vérifier que ces deux faisceaux coïncident sur le site  $\mathrm{Lis}\text{-}\acute{\mathrm{e}}\mathrm{t}(\mathcal{X})$ . Si  $U = \mathrm{Spec} A$  est un schéma affine lisse sur  $\mathcal{X}$ , il est en particulier normal, donc somme disjointe finie de schémas affines intègres, si bien que l'on peut supposer  $U$  intègre. Alors  $\mathbb{G}_m \times \mathbb{Z}(U) = A^\times \times \mathbb{Z}$ . Par ailleurs, vu que  $p$  est représentable, on a

$$p_*\mathbb{G}_m(U) = \mathbb{G}_m((\mathcal{X} \times G) \times_{\mathcal{X}} U) = \mathbb{G}_m(U \times G) = A[X, X^{-1}]^\times.$$

Or lorsque  $A$  est intègre, il est clair que les éléments inversibles de l'anneau  $A[X, X^{-1}]$  sont les éléments de la forme  $aX^n$  avec  $a \in A^\times$  et  $n \in \mathbb{Z}$ . Dans le cas où  $G = \mathbb{G}_a$ , le lecteur vérifiera facilement que l'on trouve  $p_*\mathbb{G}_m = \mathbb{G}_m$ .

Or le groupe  $H^1(\mathcal{X}, \mathbb{Z})$  est réduit à zéro d'après le théorème (4.1.2.1). On a alors, que  $G$  soit égal à  $\mathbb{G}_a$  ou  $\mathbb{G}_m$ ,

$$H^1(\mathcal{X}, p_*\mathbb{G}_m) = H^1(\mathcal{X}, \mathbb{G}_m) = \mathrm{Pic}(\mathcal{X}),$$

ce qui, vu la suite exacte évoquée ci-dessus, fournit l'isomorphisme désiré.  $\square$

La notion de faisceaux inversibles algébriquement équivalents se généralise très bien aux champs algébriques, et comme dans le cas des schémas elle permet de caractériser les  $k$ -points du foncteur de Picard qui sont dans la composante neutre.

**Définition 4.2.3 ([34] 5.9)** Soit  $\mathcal{X}$  un champ algébrique sur un corps  $k$ . Soient  $\mathcal{L}$  et  $\mathcal{N}$  deux faisceaux inversibles sur  $\mathcal{X}$ . On dit que  $\mathcal{L}$  et  $\mathcal{N}$  sont algébriquement équivalents

s'il existe une suite de  $k$ -schémas connexes de type fini  $T_1, \dots, T_n$ , des points géométriques  $s_i, t_i$  de  $T_i$  (pour tout  $i$ ) ayant tous le même corps, et un faisceau inversible  $\mathcal{M}_i$  sur  $\mathcal{X} \times_k T_i$  tels que

$$\mathcal{L}_{s_1} \simeq \mathcal{M}_{1,s_1}, \quad \mathcal{M}_{1,t_1} \simeq \mathcal{M}_{2,s_2}, \quad \dots, \quad \mathcal{M}_{n-1,t_{n-1}} \simeq \mathcal{M}_{n,s_n}, \quad \mathcal{M}_{n,t_n} \simeq \mathcal{N}_{t_n}$$

**Théorème 4.2.4 ([34] 5.10)** Soit  $\mathcal{X}$  un champ algébrique sur un corps  $k$ . On suppose que  $\text{Pic}_{\mathcal{X}/k}$  est représentable par un schéma localement de type fini. Soit  $\mathcal{L}$  un faisceau inversible sur  $\mathcal{X}$  et soit  $\lambda$  le point correspondant de  $\text{Pic}_{\mathcal{X}/k}$ . Alors  $\mathcal{L}$  est algébriquement équivalent à  $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$  si et seulement si  $\lambda$  est dans la composante neutre  $\text{Pic}_{\mathcal{X}/k}^0$ .

**Démonstration.** On peut recopier telle quelle la démonstration qui accompagne l'énoncé référencé ci-dessus.  $\square$

Comme toujours, la définition de la composante neutre est plus délicate lorsque la base n'est plus un corps, mais un schéma quelconque. La remarque (4.1.1.6) motive la définition suivante.

**Définition 4.2.5** Soient  $S$  un schéma et  $\mathcal{X}$  un  $S$ -champ algébrique. On suppose que le foncteur de Picard  $\text{Pic}_{\mathcal{X}/S}$  est représentable par un espace algébrique localement de type fini. On désigne alors par  $\text{Pic}_{\mathcal{X}/S}^0$  le sous-foncteur de  $\text{Pic}_{\mathcal{X}/S}$  défini de la manière suivante. Pour tout  $S$ -schéma  $S'$  et pour tout  $\xi \in \text{Pic}_{\mathcal{X}/S}(S')$ , on dit que  $\xi$  appartient à  $\text{Pic}_{\mathcal{X}/S}^0(S')$  si et seulement si pour tout point  $s'$  de  $S'$ , l'élément  $\xi|_{s'}$  de  $\text{Pic}_{\mathcal{X}_{s'}/\kappa(s')}(\kappa(s'))$  est dans la composante neutre  $\text{Pic}_{\mathcal{X}_{s'}/\kappa(s')}^0(\kappa(s'))$ .

**Remarque 4.2.6** Il est clair que  $\text{Pic}_{\mathcal{X}/S}^0$  est bien un sous-foncteur en groupes de  $\text{Pic}_{\mathcal{X}/S}$ . De plus, la formation de  $\text{Pic}_{\mathcal{X}/S}^0$  commute au changement de base. Par ailleurs, si  $S$  est le spectre d'un corps  $k$  et si  $\text{Pic}_{\mathcal{X}/k}$  est représentable par un schéma en groupes localement de type fini, alors le sous-foncteur  $\text{Pic}_{\mathcal{X}/k}^0$  ainsi défini coïncide avec le sous-foncteur ouvert défini par la composante connexe de l'élément neutre dans  $\text{Pic}_{\mathcal{X}/k}$ . Il en résulte dans le cas d'une base  $S$  quelconque, que pour tout point  $s$  de  $S$  la fibre de  $\text{Pic}_{\mathcal{X}/S}^0$  au-dessus de  $s$  coïncide avec  $\text{Pic}_{\mathcal{X}_s/\kappa(s)}^0$ . En particulier, si l'on suppose que pour tout  $s \in S$  la composante neutre  $\text{Pic}_{\mathcal{X}_s/\kappa(s)}^0$  du schéma en groupes  $\text{Pic}_{\mathcal{X}_s/\kappa(s)}$  est lisse sur  $\kappa(s)$ , alors la définition que nous avons adoptée coïncide avec celle donnée par Kleiman dans la proposition 5.20 de [34].

**Proposition 4.2.7** Soient  $S$  un schéma et  $\mathcal{X}$  un  $S$ -champ algébrique. On suppose que le foncteur de Picard  $\text{Pic}_{\mathcal{X}/S}$  est représentable par un espace algébrique lisse sur  $S$ . Alors le morphisme naturel

$$\text{Pic}_{\mathcal{X}/S}^0 \longrightarrow \text{Pic}_{\mathcal{X}/S}$$

est une immersion ouverte. De plus, si  $S$  est localement noethérien, alors  $\text{Pic}_{\mathcal{X}/S}^0$  est de type fini sur  $S$ .

**Démonstration.** Le fait que  $\text{Pic}_{\mathcal{X}/S}^0$  soit un ouvert de  $\text{Pic}_{\mathcal{X}/S}$  résulte immédiatement du lemme (4.1.1.5). Comme il est par hypothèse localement de type fini sur  $S$ , il ne reste plus qu'à montrer qu'il est quasi-compact lorsque  $S$  est localement noethérien. Nous reprenons pour cela, en l'adaptant à notre cas, la démonstration présentée par Kleiman dans [34] (proposition 5.20). C'est une question locale sur  $S$ , donc on peut supposer que  $S$  est affine noethérien. Notons  $\sigma$  le morphisme naturel de  $\text{Pic}_{\mathcal{X}/S}^0$  vers  $S$ . Par récurrence

noethérienne sur les fermés de  $S$ , on peut supposer que pour tout fermé strict  $Z$  de  $S$ ,  $\sigma^{-1}(Z) = \text{Pic}_{\mathcal{X}/S}^0 \times_S Z$  est quasi-compact. Il suffit alors, par le même raisonnement que celui que nous avons suivi lors de la démonstration du théorème (2.1.1.2), de construire un ouvert non vide  $U$  de  $S$  tel que  $\sigma^{-1}(U)$  soit quasi-compact.

Soit  $\pi : V \rightarrow \text{Pic}_{\mathcal{X}/S}^0$  un morphisme étale, où  $V$  est un schéma affine non vide, et soit  $U = \sigma(\pi(V))$ . Comme  $\sigma \circ \pi$  est un morphisme lisse,  $U$  est un ouvert de  $S$ . Pour montrer que cet ouvert  $U$  convient, on va construire un morphisme surjectif de  $V \times_S V$  vers  $\text{Pic}_{\mathcal{X}/S}^0 \times_S U$ . Ce sera suffisant, puisque  $V \times_S V$  est quasi-compact. On a un diagramme commutatif de  $S$ -espaces algébriques :

$$\begin{array}{ccccc} V \times_S V & \xrightarrow{\pi \times \pi} & \text{Pic}_{\mathcal{X}/S}^0 \times_S \text{Pic}_{\mathcal{X}/S}^0 & \xrightarrow{\alpha} & \text{Pic}_{\mathcal{X}/S}^0 \\ \downarrow & & & & \downarrow \sigma \\ U & \xrightarrow{\hspace{10em}} & & & S \end{array}$$

où  $\alpha$  est défini fonctoriellement par  $\alpha(g, h) = g.h^{-1}$ . On en déduit un morphisme  $\alpha' : V \times_S V \rightarrow \text{Pic}_{\mathcal{X}/S}^0 \times_S U$ , dont il ne nous reste plus qu'à montrer la surjectivité. En vertu du lemme (4.2.8) ci-dessous, on peut supposer pour cela que  $S$  est le spectre d'un corps algébriquement clos. Mais dans ce cas on a  $U = S$  et il faut montrer que le morphisme  $\alpha \circ (\pi \times \pi)$  est surjectif. De plus, vu que  $S$  est le spectre d'un corps,  $\text{Pic}_{\mathcal{X}/S}^0$  est un schéma en groupes et on peut supposer que  $V$  est un ouvert de  $\text{Pic}_{\mathcal{X}/S}^0$ . Alors le résultat découle du lemme (4.2.9).  $\square$

**Lemme 4.2.8** *Soient  $S$  un schéma et  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme de  $S$ -espaces algébriques. Alors  $f$  est surjectif si et seulement si pour tout morphisme de  $\text{Spec } L$  vers  $S$  avec  $L$  un corps algébriquement clos, le morphisme  $f_L$  obtenu par changement de base est surjectif.*

**Démonstration.** Évident.  $\square$

**Lemme 4.2.9** *Soient  $k$  un corps algébriquement clos,  $G$  un  $k$ -schéma en groupes localement de type fini, et  $U$  un ouvert non vide de  $G$ . Alors le morphisme composé*

$$\begin{aligned} \beta : U \times U &\longrightarrow G^0 \times G^0 \xrightarrow{\alpha} G^0 \\ (g, h) &\longmapsto g.h^{-1} \end{aligned}$$

*est surjectif.*

**Démonstration.** Soit  $x$  un  $k$ -point de  $G^0$ . Comme  $G^0$  est irréductible, les ouverts  $U$  et  $xU$  sont d'intersection non vide. Soit  $y$  un  $k$ -point appartenant à  $U \cap xU$ . On note  $z$  le  $k$ -point  $x^{-1}y$ . Alors  $z$  est dans  $U$ , et l'on a  $x = yz^{-1}$ , donc  $x$  est dans l'image de  $\beta$ . L'ouvert  $Uz^{-1}$  est un voisinage de  $x$  inclus dans l'image de  $\beta$ . Donc  $\beta(U \times U)$  contient un ouvert qui contient tous les  $k$ -points de  $G^0$ , et comme l'ensemble des  $k$ -points est très dense ceci achève la démonstration.  $\square$

# Chapitre 5

## Quelques exemples

### 5.1 L'espace projectif

Soit  $S = \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$  et soit  $X$  l'espace projectif  $\mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^n$  de dimension  $n$  sur  $S$ . On étudie dans cette section le foncteur et le champ de Picard de  $X$ . Le résultat ( $\operatorname{Pic}_{X/S} = \mathbb{Z}$ ), bien connu, très classique, est sûrement présent dans de nombreux ouvrages. Voyons rapidement comment le redémontrer. On sait déjà par exemple grâce à [28] V thm. 3.1 que  $\operatorname{Pic}_{X/S}$  est un schéma. Comme  $X \rightarrow S$  a une section, on sait aussi que ce foncteur est égal à  $P_{X/S}$ . On a de plus un morphisme de foncteurs

$$\varphi : \mathbb{Z} \longrightarrow \operatorname{Pic}_{X/S}$$

qui à un entier  $l$  associe  $\mathcal{O}(l)$ . On va montrer que  $\varphi$  est un isomorphisme. L'injectivité est facile. Pour la surjectivité, nous allons en fait construire l'isomorphisme réciproque. Nous aurons besoin du résultat préliminaire suivant.

**Lemme 5.1.1** *Le morphisme  $\operatorname{Pic}_{X/S} \rightarrow S$  est non ramifié.*

**Démonstration.** On sait qu'il est de toute manière localement de présentation finie d'après (1.4.1.1). Il faut donc montrer qu'il est formellement non ramifié, c'est-à-dire que pour tout schéma affine  $S'$ , tout sous-schéma fermé  $S'_0$  de  $S'$  défini par un idéal  $I$  de carré nul, et tout morphisme de  $S'$  dans  $S$ , l'application canonique

$$\operatorname{Hom}_S(S', \operatorname{Pic}_{X/S}) \longrightarrow \operatorname{Hom}_S(S'_0, \operatorname{Pic}_{X/S})$$

est injective. On se donne donc un faisceau inversible  $\mathcal{L}$  sur  $X' = X \times_S S'$  dont la restriction  $\mathcal{L}_0$  à  $X'_0 = X \times_S S'_0$  provient de la base  $S'_0$ . Il faut montrer que  $\mathcal{L}$  provient de la base  $S'$ . Par hypothèse,  $\mathcal{L}_0$  provient d'un faisceau  $\mathcal{B}_0$  sur  $S'_0$ , qui lui-même provient d'un faisceau inversible  $\mathcal{B}$  sur  $S'$  puisque  $H^2(S', I)$  est nul (on utilise (3.2.5)). Maintenant  $\mathcal{L}$  et  $\mathcal{B}|_{X'}$  sont deux déformations de  $\mathcal{L}_0$  à  $X'$ . D'après le théorème (3.2.5) elles sont nécessairement isomorphes puisque  $H^1(X', I)$  est nul. Donc  $\mathcal{L}$  provient de la base, ce qu'il fallait démontrer.  $\square$

Considérons maintenant un faisceau inversible  $\mathcal{L}$  sur  $\mathbb{P}_T^n$ . On peut lui associer la fonction « degré » sur  $T$  définie ainsi

$$\deg_{\mathcal{L}} : \begin{cases} T \longrightarrow \mathbb{Z} \\ t \longmapsto \text{degré de } \mathcal{L}_t \end{cases}$$

où  $\mathcal{L}_t$  désigne la restriction de  $\mathcal{L}$  à la fibre  $\mathbb{P}_{\kappa(t)}^n$ . Nous allons montrer que la fonction  $\deg_{\mathcal{L}}$  est localement constante sur  $T$ . Soient  $\mathcal{L}$  et  $\mathcal{M}$  deux faisceaux inversibles sur  $\mathbb{P}_T^n$  et soient  $\lambda, \mu$ , les  $T$ -points de  $\text{Pic}_{X/S}$  associés. On forme le produit fibré :

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\quad} & T \\ \downarrow & \square & \downarrow (\lambda, \mu) \\ \text{Pic}_{X/S} & \xrightarrow{\Delta} & \text{Pic}_{X/S} \times_S \text{Pic}_{X/S}. \end{array}$$

Vu que  $\text{Pic}_{X/S}$  est non ramifié, la diagonale  $\Delta$  est une immersion ouverte si bien que  $U$  est un ouvert de  $T$ . Par ailleurs, il est clair qu'un point  $x$  de  $T$  appartient à  $U$  si et seulement si  $\deg_{\mathcal{L}}(x)$  et  $\deg_{\mathcal{M}}(x)$  sont égaux. On en déduit facilement que  $\deg_{\mathcal{L}}$  est localement constante sur  $T$ .

On peut donc définir un morphisme « degré »

$$\deg : \text{Pic}_{X/S} \longrightarrow \mathbb{Z}$$

qui à un faisceau inversible  $\mathcal{L}$  associe  $\deg_{\mathcal{L}}$ . Il est clair que ce morphisme est l'inverse de  $\varphi$ .

Enfin pour déterminer le champ de Picard de  $X$  on peut appliquer (1.3.8) et l'on voit qu'il est isomorphe à  $\mathbb{Z} \times \text{BG}_m$ .

$$\mathcal{P}ic(\mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^n / \text{Spec } \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z} \times \text{BG}_m$$

## 5.2 Racine $n^{\text{ième}}$ d'un faisceau inversible

Passons maintenant à un exemple un peu plus élaboré. Soient  $X$  un  $S$ -schéma et  $\mathcal{L}$  un faisceau inversible sur  $X$ . Soit  $n$  un entier strictement positif. On fabrique un champ  $[\mathcal{L}^{\frac{1}{n}}]$  à partir de ces données de la manière suivante. Si  $U$  est un objet de  $(\text{Aff}/S)$ ,  $[\mathcal{L}^{\frac{1}{n}}]_U$  est la catégorie des triplets  $(x, \mathcal{M}, \varphi)$  où

$$\left\{ \begin{array}{l} x : U \rightarrow X \text{ est un élément de } X(U) \\ \mathcal{M} \text{ est un faisceau inversible sur } U \\ \varphi : \mathcal{M}^{\otimes n} \rightarrow x^* \mathcal{L} \text{ est un isomorphisme de faisceaux inversibles.} \end{array} \right.$$

L'ensemble des morphismes de  $(x, \mathcal{M}, \varphi)$  vers  $(x', \mathcal{M}', \varphi')$  est vide si  $x \neq x'$ , et sinon c'est l'ensemble des isomorphismes  $\psi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}'$  tels que  $\psi^{\otimes n}$  soit compatible avec  $\varphi$  et  $\varphi'$ .

Remarquons que nous avons un morphisme canonique  $\pi : [\mathcal{L}^{\frac{1}{n}}] \rightarrow X$ . Si l'on regarde  $[\mathcal{L}^{\frac{1}{n}}]$  comme un groupoïde sur  $X$ , alors pour tout  $U \in \text{ob}(\text{Aff}/X)$ , la catégorie fibre  $[\mathcal{L}^{\frac{1}{n}}]_U$  est simplement la catégorie des couples  $(\mathcal{M}, \varphi)$ .

Si  $U \in \text{ob}(\text{Aff}/S)$  et si  $\alpha$  est un objet de  $[\mathcal{L}^{\frac{1}{n}}]_U$ , un calcul rapide montre que le foncteur  $\mathcal{A}ut_U(\alpha)$  est représentable par  $\mu_n$ . Plus généralement, si  $\alpha_1, \alpha_2$  sont deux objets de  $[\mathcal{L}^{\frac{1}{n}}]_U$ , alors le foncteur  $\mathcal{I}som(\alpha_1, \alpha_2)$  est représentable par un schéma fini sur  $U$  (localement ce schéma est de la forme  $\text{Spec}(A[X]/(X^n - \gamma))$  où  $\text{Spec } A$  est un ouvert de  $U$  qui trivialisent les objets  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  et  $\gamma$  est un élément de  $A^\times$ ). En d'autres termes le morphisme diagonal

$$\Delta_\pi : [\mathcal{L}^{\frac{1}{n}}] \longrightarrow [\mathcal{L}^{\frac{1}{n}}] \times_X [\mathcal{L}^{\frac{1}{n}}]$$

est schématique et fini. En particulier  $[\mathcal{L}^{\frac{1}{n}}]$  est un  $S$ -préchamp. Il est clair que c'est même un  $S$ -champ.



**Remarque 5.2.1** Si  $f : Y \rightarrow X$  est un morphisme de  $S$ -schémas, alors le  $S$ -champ  $[\mathcal{L}^{\frac{1}{n}}] \times_X Y$  est canoniquement 1-isomorphe à  $[(f^* \mathcal{L})^{\frac{1}{n}}]$  (évident).

**Proposition 5.2.2** *Le champ  $[\mathcal{L}^{\frac{1}{n}}]$  est une gerbe fppf sur  $X$ . Si  $S$  est un  $\mathbb{Z}[\frac{1}{n}]$ -schéma, alors  $[\mathcal{L}^{\frac{1}{n}}]$  est même une gerbe étale sur  $X$ .*

**Démonstration.** Il est clair que  $[\mathcal{L}^{\frac{1}{n}}]$  a des objets partout localement pour la topologie de Zariski, puisque pour tout  $U$  le faisceau  $\mathcal{O}_U$  a une racine  $n^{\text{ième}}$  évidente. A fortiori  $\pi$  est un épimorphisme (au sens que l'on veut, étale ou fppf).

Montrons que le morphisme diagonal est un épimorphisme fppf, et que c'est même un épimorphisme étale lorsque  $n$  est inversible. Soient  $U \in \text{ob}(\text{Aff}/S)$  et  $x \in X(U)$ . Il s'agit de montrer que deux objets quelconques de  $[\mathcal{L}^{\frac{1}{n}}]_U$  au-dessus de  $x$  sont isomorphes localement pour la topologie fppf (resp. étale). Quitte à localiser pour la topologie de Zariski, on peut supposer que les faisceaux sous-jacents à  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  sont triviaux. La question revient alors à montrer que tout élément de  $\mathbb{G}_m(U)$  admet une racine  $n^{\text{ième}}$  localement pour la topologie considérée. Soit  $\gamma \in \mathbb{G}_m(U)$ . On note  $U = \text{Spec } A$  et  $B = A[X]/(X^n - \gamma)$ . Il est clair que  $B$  est fini et plat sur  $A$ . D'après le going-up theorem, le morphisme  $\text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } A$  est surjectif, donc c'est une famille couvrante pour la topologie fppf qui répond au problème posé. Si de plus  $n$  est inversible alors c'est même une famille couvrante pour la topologie étale.  $\square$

**Proposition 5.2.3** *Si  $\mathcal{L}$  a une racine  $n^{\text{ième}}$  sur  $X$ , i.e. s'il existe un faisceau inversible  $\mathcal{M}$  sur  $X$  tel que  $\mathcal{M}^{\otimes n}$  soit isomorphe à  $\mathcal{L}$ , alors  $[\mathcal{L}^{\frac{1}{n}}]$  est canoniquement (une fois qu'on a fixé  $\mathcal{M}$  et un isomorphisme entre  $\mathcal{M}^{\otimes n}$  et  $\mathcal{L}$ ) 1-isomorphe au champ classifiant  $(B\mu_n)_{\text{fppf}}$  du groupe  $\mu_n$  pour la topologie fppf. En particulier c'est un champ algébrique ([38] (10.6) et (10.13.1)).*

**Remarque 5.2.4** Si  $n$  est inversible, alors  $\mu_n$  est étale et les champs  $(B\mu_n)_{\text{fppf}}$  et  $B\mu_n$  coïncident ([38] (9.6)). Dans ce cas ce sont des champs de Deligne-Mumford. Notons que si  $n$  n'est pas inversible, alors  $\mu_n$  n'est pas lisse, et le champ  $B\mu_n$  qui classe les  $\mu_n$ -torseurs étales n'a aucune raison *a priori* d'être algébrique.

**Démonstration.** La donnée d'un faisceau inversible  $\mathcal{M}$  sur  $X$  et d'un isomorphisme

$$\varphi : \mathcal{M}^{\otimes n} \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}$$

définit une section  $s : X \rightarrow [\mathcal{L}^{\frac{1}{n}}]$  du morphisme structural  $\pi$ . Donc la gerbe fppf  $[\mathcal{L}^{\frac{1}{n}}]$  sur  $X$  est une gerbe neutre (au sens de [38] (3.20)). Le résultat découle donc de l'analogie fppf de [38] (3.21).  $\square$

**Remarque 5.2.5** On a déjà vu que  $[\mathcal{L}^{\frac{1}{n}}]$  est un  $S$ -champ fppf, donc *a fortiori* un  $S$ -champ (étale), et que sa diagonale est représentable, séparée, et quasi-compacte (puisque  $\Delta_\pi$  est schématique et fini et que le morphisme  $[\mathcal{L}^{\frac{1}{n}}] \times_X [\mathcal{L}^{\frac{1}{n}}] \rightarrow [\mathcal{L}^{\frac{1}{n}}] \times_S [\mathcal{L}^{\frac{1}{n}}]$ , obtenu par changement de base à partir de la diagonale de  $X/S$ , est une immersion quasi-compacte). Soit  $X' \rightarrow X$  une famille couvrante (pour la topologie de Zariski) telle que  $\mathcal{L}|_{X'}$  soit trivial. Alors d'après la proposition précédente et la remarque (5.2.1), on a un diagramme 2-cartésien

$$\begin{array}{ccc} (B\mu_n)_{\text{fppf}} & \longrightarrow & [\mathcal{L}^{\frac{1}{n}}] \\ \downarrow & \square & \downarrow \\ X' & \longrightarrow & X \end{array}$$

ce qui prouve que  $[\mathcal{L}^{\frac{1}{n}}]$  est un champ algébrique.

**Remarque 5.2.6** On suppose que  $S$  est un  $\mathbb{Z}[\frac{1}{n}]$ -schéma et que  $X$  est noethérien. Alors  $\pi$  est propre, lisse, de présentation finie, et cohomologiquement plat en dimension zéro. En particulier si  $X/S$  vérifie ces propriétés, le morphisme  $[\mathcal{L}^{\frac{1}{n}}] \rightarrow S$  les vérifie aussi.

CALCUL DU GROUPE DE PICARD DE  $[\mathcal{L}^{\frac{1}{n}}]$

**Lemme 5.2.7** Soient  $X$  un schéma et  $A$  un schéma en groupes commutatifs sur  $X$ . Soit  $\mathcal{F}$  un faisceau inversible sur une  $A$ -gerbe (fppf)  $\pi : \mathcal{X} \rightarrow X$ . Il existe un unique  $X$ -morphisme de schémas en groupes

$$\chi_{\mathcal{F}} : A \longrightarrow \mathbb{G}_m$$

tel que l'action naturelle de  $A$  sur  $\mathcal{F}$  soit induite par  $\chi_{\mathcal{F}}$  et par la multiplication  $\mathcal{F} \times \mathbb{G}_m \rightarrow \mathcal{F}$  induite par la structure de  $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ -module de  $\mathcal{F}$ , autrement dit tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} A \times \mathcal{F} & & \\ \downarrow & \searrow & \\ \mathbb{G}_m \times \mathcal{F} & \nearrow & \mathcal{F} \end{array}$$

**Démonstration.** Un faisceau inversible sur la gerbe  $\mathcal{X}$  est la donnée, pour tout  $x \in \text{ob } \mathcal{X}_U$ , d'un faisceau inversible  $\mathcal{F}_x$  sur  $U$ , et pour tout morphisme  $\varphi : x \rightarrow x'$  dans  $\mathcal{X}$ , d'un isomorphisme

$$L_{\mathcal{F}}(\varphi) : \mathcal{F}_x \rightarrow \pi(\varphi)^* \mathcal{F}_{x'}$$

ces isomorphismes vérifiant de plus une condition de compatibilité évidente.

Construisons d'abord  $\chi_{\mathcal{F}}(U)$  pour un  $U \in \text{ob}(\text{Aff}/X)$  sur lequel  $\mathcal{X}$  a des objets. Soit  $x \in \text{ob } \mathcal{X}_U$  et soit  $g \in A(U)$ . Via l'identification entre  $A(U)$  et  $\text{Aut}(x)$ ,  $g$  correspond à un automorphisme  $\varphi$  de  $x$ , et induit de ce fait un automorphisme  $L_{\mathcal{F}}(\varphi)$  de  $\mathcal{F}_x$ . Cet automorphisme correspond à la multiplication par un unique élément de  $\mathbb{G}_m(U)$ , que l'on note pour l'instant  $\chi_{\mathcal{F}}(U)(x, g)$ . Maintenant si  $x$  et  $x'$  sont deux objets de  $\mathcal{X}_U$ , on vérifie facilement que  $\chi_{\mathcal{F}}(U)(x, g) = \chi_{\mathcal{F}}(U)(x', g)$  en utilisant la condition de compatibilité entre les  $L_{\mathcal{F}}(\varphi)$ , le fait que  $x$  et  $x'$  sont localement isomorphes pour la topologie *fppf* et le fait que  $\mathbb{G}_m$  est un faisceau pour cette même topologie. D'où le morphisme  $\chi_{\mathcal{F}}(U) : A(U) \rightarrow \mathbb{G}_m(U)$ . Il est clair, vu sa construction, que ce morphisme est déterminé de manière unique par les actions naturelles de  $A$  et de  $\mathbb{G}_m$  sur  $\mathcal{F}$ .

Étant donné que  $\mathcal{X}$  a des objets partout localement pour la topologie *fppf*, cette collection de morphismes se prolonge de manière unique en un caractère  $\chi_{\mathcal{F}}$  de  $A$  vérifiant les propriétés annoncées.  $\square$

**Remarque 5.2.8** Si  $\chi$  est un caractère fixé de  $A$ , un faisceau inversible  $\mathcal{F}$  sur  $\mathcal{X}$  est un faisceau  $\chi$ -tordu de degré  $d$  (au sens de Lieblich, [40] 2.1.2.2) si et seulement si  $\chi_{\mathcal{F}} = \chi^d$ .

**Propriétés 5.2.9** (1) La construction de  $\chi_{\mathcal{F}}$  est compatible au changement de base en un sens évident.

(2) Si  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$  sont des faisceaux inversibles sur  $\mathcal{X}$ , alors

$$\chi_{\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}} = \chi_{\mathcal{F}} \cdot \chi_{\mathcal{G}}.$$

(3) Un faisceau inversible  $\mathcal{F}$  sur  $\mathcal{X}$  provient de  $X$  si et seulement si  $\chi_{\mathcal{F}}$  est trivial.

**Démonstration.** La première propriété est évidente : il suffit de l'écrire. La deuxième résulte immédiatement du fait que si l'automorphisme  $L_{\mathcal{F}}(\varphi)$  (resp.  $L_{\mathcal{G}}(\varphi)$ ) de  $\mathcal{F}_x$  (resp.  $\mathcal{G}_x$ ) est la multiplication par  $\chi_{\mathcal{F}}(\varphi)$  (resp.  $\chi_{\mathcal{G}}(\varphi)$ ), alors l'automorphisme  $L_{\mathcal{F}}(\varphi) \otimes L_{\mathcal{G}}(\varphi)$  de  $\mathcal{F}_x \otimes \mathcal{G}_x$  est la multiplication par  $\chi_{\mathcal{F}}(\varphi) \cdot \chi_{\mathcal{G}}(\varphi)$ . Montrons maintenant le dernier point.

Supposons tout d'abord que  $\mathcal{F}$  soit isomorphe à un faisceau de la forme  $\pi^* \mathcal{M}$ , où  $\mathcal{M}$  est un faisceau inversible sur  $X$ . Il est clair que  $\chi_{\mathcal{F}}$  est égal à  $\chi_{\pi^* \mathcal{M}}$  donc il suffit de montrer que  $\chi_{\pi^* \mathcal{M}}$  est trivial, c'est-à-dire que pour tout objet  $x$  de  $\mathcal{X}$  et pour tout automorphisme  $\varphi$  de  $x$ , l'automorphisme  $L_{\pi^* \mathcal{M}}(\varphi)$  de  $(\pi^* \mathcal{M})_x$  est l'identité. C'est évident par construction de l'image inverse.

Réciproquement, supposons  $\chi_{\mathcal{F}}$  trivial, i.e. supposons que pour tout objet  $x$  de  $\mathcal{X}$  et tout automorphisme  $\varphi$  de  $x$ ,  $L_{\mathcal{F}}(\varphi)$  soit l'identité de  $\mathcal{F}_x$ . En utilisant le lemme (1.2.2.7) on voit que provenir de la base est une question locale sur  $X$  pour la topologie *fppf*. On peut donc supposer, grâce à la propriété (1) ci-dessus, que  $\mathcal{X}$  est une gerbe neutre, c'est-à-dire que le morphisme structural  $\pi : \mathcal{X} \rightarrow X$  a une section  $s : X \rightarrow \mathcal{X}$ .

On va alors montrer que  $\mathcal{F}$  est isomorphe à  $\pi^* s^* \mathcal{F}$ . Le faisceau  $\pi^* s^* \mathcal{F}$  est celui qui à tout objet  $x$  de  $\mathcal{X}$  associe  $\mathcal{F}_{s(\pi(x))}$ , les isomorphismes de changement de base étant simplement les isomorphismes canoniques. Nous allons construire une collection d'isomorphismes  $\rho_x$  de  $\mathcal{F}_x$  dans  $\mathcal{F}_{s(\pi(x))}$  (pour chaque objet  $x$  de  $\mathcal{X}$ ), compatibles avec les  $L_{\mathcal{F}}(\varphi)$  et les  $L_{\pi^* s^* \mathcal{F}}(\varphi)$ .

Si  $x$  et  $s(\pi(x))$  sont isomorphes dans  $\mathcal{X}_U$  on choisit un isomorphisme  $\varphi$  de  $x$  dans  $s(\pi(x))$  et on pose  $\rho_x = L_{\mathcal{F}}(\varphi)$ . Si  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  sont deux tels isomorphismes, alors  $(\varphi_2)^{-1} \circ \varphi_1$  est un automorphisme de  $x$ , donc d'après l'hypothèse sur  $\mathcal{F}$  on a  $L_{\mathcal{F}}((\varphi_2)^{-1} \circ \varphi_1) = \text{Id}_{\mathcal{F}_x}$  de sorte que  $\rho_x$  est bien défini et ne dépend pas du choix de  $\varphi$ .

Dans le cas général, on sait que  $x$  et  $s(\pi(x))$  sont localement isomorphes pour la topologie *fppf* puisque  $\mathcal{X}$  est une gerbe. Vu l'unicité dans la construction de  $\rho_x$  lorsque  $x$  est isomorphe à  $s(\pi(x))$ , il est clair qu'il existe un unique isomorphisme  $\rho_x : \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{F}_{s(\pi(x))}$  compatible avec ceux construits dans le cas précédent. La collection de tous les  $\rho_x$  ainsi construits répond au problème posé.  $\square$

**Exemple 5.2.10 (groupe de Picard de BG)** En utilisant cette construction, on retrouve facilement le groupe de Picard du champ classifiant  $BG$ , où  $G$  est un  $X$ -schéma en groupes abéliens. En effet, le morphisme structural  $\pi : BG \rightarrow X$  a une section, donc  $\pi^* : \text{Pic}(X) \rightarrow \text{Pic}(BG)$  a une rétraction et en particulier il est injectif. D'après la proposition précédente, l'application  $\mathcal{F} \mapsto \chi_{\mathcal{F}}$  induit un morphisme de groupes de  $\text{Pic}(BG)$  dans  $\widehat{G}$  dont  $\text{Pic}(X)$  est le noyau. Ce morphisme est naturellement scindé : si  $\chi : G \rightarrow \mathbb{G}_m$  est un caractère de  $G$ , on lui associe la classe du faisceau inversible  $\mathcal{L}(\chi)$  construit de la manière suivante. Pour tout  $U \in \text{ob}(\text{Aff}/S)$  et tout  $G$ -torseur  $\tilde{U}$  on définit  $\mathcal{L}(\chi)_{\tilde{U}}$  comme étant le faisceau inversible correspondant au  $\mathbb{G}_m$ -torseur sur  $U$  obtenu à partir de  $\tilde{U}$  par extension du groupe structural via le caractère  $\chi$ . On a donc une suite exacte courte scindée :

$$1 \longrightarrow \text{Pic}(X) \longrightarrow \text{Pic}(BG) \longrightarrow \widehat{G} \longrightarrow 1$$

de sorte que  $\text{Pic}(BG)$  est naturellement isomorphe au produit  $\text{Pic}(X) \times \widehat{G}$ .

Dans le cas du champ  $[\mathcal{L}^{\frac{1}{n}}]$ , on a un faisceau inversible « canonique », que nous noterons  $\Omega$ , et que l'on peut construire de la manière suivante. Pour tout  $U \in \text{ob}(\text{Aff}/S)$  et tout objet  $\alpha = (x, \mathcal{M}, \varphi)$  de  $[\mathcal{L}^{\frac{1}{n}}]_U$ , on pose  $\Omega_{\alpha} = \mathcal{M}$ . Les isomorphismes de changement de base sont définis de manière évidente. Il est clair que le caractère  $\chi_{\Omega}$  associé à  $\Omega$  est

simplement l'injection canonique

$$\chi : \mu_n \longrightarrow \mathbb{G}_m.$$

En particulier, vu que  $\chi$  n'est pas le caractère trivial, on peut en déduire que le faisceau  $\Omega$  ne provient pas de la base  $X$  ! Enfin, pour tout objet  $\alpha = (x, \mathcal{M}, \varphi)$  de  $[\mathcal{L}^{\frac{1}{n}}]_U$  (où  $U \in \text{ob}(\text{Aff}/S)$ ), le faisceau  $(\Omega^{\otimes n})_\alpha$ , qui n'est autre que  $\mathcal{M}^{\otimes n}$ , est canoniquement isomorphe à  $x^*\mathcal{L}$  (via  $\varphi$  !) de sorte que l'on a un isomorphisme canonique

$$\Phi : \Omega^{\otimes n} \xrightarrow{\sim} \pi^*\mathcal{L}.$$

Nous avons maintenant presque tous les éléments en main pour décrire de manière complète le groupe de Picard de  $[\mathcal{L}^{\frac{1}{n}}]$ . Nous terminons le travail dans la proposition ci-dessous.

**Proposition 5.2.11** *On note  $l$  la classe du faisceau  $\mathcal{L}$  dans  $\text{Pic}(X)$  et  $\omega$  celle de  $\Omega$  dans  $\text{Pic}([\mathcal{L}^{\frac{1}{n}}])$ .*

(1) *Le morphisme  $\pi^* : \text{Pic}(X) \rightarrow \text{Pic}([\mathcal{L}^{\frac{1}{n}}])$  est injectif, et l'on a une suite exacte courte :*

$$1 \longrightarrow \text{Pic}(X) \longrightarrow \text{Pic}([\mathcal{L}^{\frac{1}{n}}]) \longrightarrow \widehat{\mu_n} \longrightarrow 1.$$

(2) *Le groupe  $\text{Pic}([\mathcal{L}^{\frac{1}{n}}])$  est isomorphe au quotient du groupe  $\text{Pic}(X) \times H^0(X, \mathbb{Z})$  par le sous  $H^0(X, \mathbb{Z})$ -module engendré par  $(l^{-1}, n)$  (autrement dit par la relation  $\omega^n = l$ ).*

**Démonstration.** La propriété (5.2.9) (2) montre que l'application  $\mathcal{F} \mapsto \chi_{\mathcal{F}}$  induit un morphisme de groupes de  $\text{Pic}([\mathcal{L}^{\frac{1}{n}}])$  dans  $\widehat{\mu_n}$ . Il est clair que ce morphisme est surjectif, vu que  $\widehat{\mu_n}$  est isomorphe au groupe  $H^0(X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ , engendré par l'injection canonique  $\chi : \mu_n \rightarrow \mathbb{G}_m$ , et que  $\chi = \chi_{\Omega}$ . La propriété (5.2.9) (3) montre que la suite ci-dessus est exacte en  $\text{Pic}([\mathcal{L}^{\frac{1}{n}}])$ . Pour en finir avec le premier point il nous reste donc juste à montrer l'injectivité de  $\pi^*$ .

Soit  $\mathcal{N}$  un faisceau inversible sur  $X$  et soit  $f$  un isomorphisme de  $\pi^*\mathcal{N}$  dans  $\mathcal{O}_{[\mathcal{L}^{\frac{1}{n}}]}$ . Il s'agit de montrer que  $\mathcal{N}$  est trivial. L'isomorphisme  $f$  est donné par une collection d'isomorphismes

$$f_\alpha : (\pi^*\mathcal{N})_\alpha = x^*\mathcal{N} \xrightarrow{\sim} (\mathcal{O}_{[\mathcal{L}^{\frac{1}{n}}]})_\alpha = \mathcal{O}_U$$

pour chaque objet  $\alpha = (x, \mathcal{M}, \varphi)$  de  $[\mathcal{L}^{\frac{1}{n}}]_U$ , ces isomorphismes vérifiant de plus une condition de compatibilité que nous nous dispensons d'explicitier, mais qui, en particulier, entraîne que les isomorphismes  $f_\alpha$  et  $f_{\alpha'}$  associés à deux objets  $\alpha$  et  $\alpha'$  au-dessus d'un même élément  $x$  de  $X(U)$  sont égaux dès que  $\alpha$  et  $\alpha'$  sont isomorphes. Si  $x \in X(U)$  est un objet de  $X$  au-dessus duquel  $[\mathcal{L}^{\frac{1}{n}}]_U$  a des objets, alors vu que deux objets  $\alpha$  et  $\alpha'$  sont localement isomorphes, les  $f_\alpha$  pour  $\alpha \in \text{ob}[\mathcal{L}^{\frac{1}{n}}]_U$  sont tous égaux et définissent donc une section  $f_x$  du faisceau  $\mathcal{I} \text{som}(x^*\mathcal{N}, \mathcal{O}_U)$ . En fait, vu que  $[\mathcal{L}^{\frac{1}{n}}]$  a des objets partout localement pour la topologie  $fppf$ , la collection des  $f_\alpha$  définit de manière unique un élément  $f_x \in \mathcal{I} \text{som}(x^*\mathcal{N}, \mathcal{O}_U)(U)$  pour tout  $x \in X(U)$ , que  $[\mathcal{L}^{\frac{1}{n}}]$  ait des objets au-dessus de  $x$  ou non. On vérifie facilement que les isomorphismes ainsi construits

$$f_x : x^*\mathcal{N} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_U$$

forment un système compatible d'isomorphismes et définissent donc un isomorphisme de  $\mathcal{N}$  dans  $\mathcal{O}_X$ , ce qui achève la démonstration.

Pour le point (2), notons  $G$  le quotient du groupe  $\text{Pic}(X) \times H^0(X, \mathbb{Z})$  par le sous  $H^0(X, \mathbb{Z})$ -module engendré par la relation  $\omega^n = l$ . On a clairement un morphisme de  $G$  dans  $\text{Pic}([\mathcal{L}^{\frac{1}{n}}])$  qui envoie  $(0, 1)$  sur  $\omega$ . En utilisant les propriétés précédentes, et le fait que  $\widehat{\mu}_n$  est isomorphe à  $H^0(X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$  et engendré par  $\chi_\Omega$ , on vérifie très facilement que ce morphisme est un isomorphisme.  $\square$

**Exemple 5.2.12** Prenons pour  $X$  l'espace projectif  $\mathbb{P}^k$  sur  $\text{Spec } \mathbb{Z}$ . Alors  $\text{Pic}(X)$  est isomorphe à  $\mathbb{Z}$ . On fixe un entier relatif  $l$  et on pose  $\mathcal{L} = \mathcal{O}(l)$ . La proposition précédente permet de calculer  $\text{Pic}([\mathcal{L}^{\frac{1}{n}}])$  pour tout  $n$  appartenant à  $\mathbb{N}^*$ . Par exemple si  $l = 1$ , on trouve  $\frac{1}{n}\mathbb{Z}$ . Si  $l$  est un multiple de  $n$ , on est dans le cas où  $\mathcal{L}$  a une racine  $n^{\text{ième}}$  et l'on trouve  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ . Dans le cas général, le groupe  $\text{Pic}([\mathcal{L}^{\frac{1}{n}}])$  est isomorphe (de manière non canonique) à  $\frac{d}{n}\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$  où  $d$  est le pgcd de  $n$  et  $l$ .

FONCTEUR DE PICARD RELATIF DE  $[\mathcal{L}^{\frac{1}{n}}]/S$

Notons  $\mathcal{X} = [\mathcal{L}^{\frac{1}{n}}]$ . Pour tout schéma  $U$  sur  $S$ , on a une suite exacte courte :

$$1 \longrightarrow \text{Pic}(X \times_S U) \longrightarrow \text{Pic}(\mathcal{X} \times_S U) \longrightarrow H^0(X \times_S U, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \longrightarrow 1.$$

Elle induit la suite exacte

$$1 \longrightarrow \frac{\text{Pic}(X \times_S U)}{\text{Pic}(U)} \longrightarrow \frac{\text{Pic}(\mathcal{X} \times_S U)}{\text{Pic}(U)} \longrightarrow H^0(X \times_S U, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \longrightarrow 1,$$

d'où une suite exacte de préfaisceaux

$$1 \longrightarrow P_{X/S} \longrightarrow P_{\mathcal{X}/S} \longrightarrow f_*\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow 1.$$

En appliquant à cette suite exacte le foncteur « faisceau étale associé » on obtient une suite exacte de faisceaux étales :

$$1 \longrightarrow \text{Pic}_{X/S} \xrightarrow{\varphi_0} \text{Pic}_{\mathcal{X}/S} \xrightarrow{\chi} f_*\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow 1. \quad (5.1)$$

**Remarque 5.2.13** Si  $\mathcal{L}$  a une racine  $n^{\text{ième}}$   $\mathcal{R}$ , la suite exacte (5.1) est scindée par  $i \mapsto (\omega r^{-1})^i$  où  $r$  est la classe de  $\mathcal{R}$  dans  $\text{Pic}(X)$ , si bien que  $\text{Pic}_{\mathcal{X}/S}$  s'identifie au produit  $\text{Pic}_{X/S} \times_S f_*\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ .

**Remarque 5.2.14** Le faisceau  $f_*\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  n'est *a priori* pas représentable. En conséquence, dans le cas général, il ne suffit pas que  $\text{Pic}_{X/S}$  soit représentable pour que  $\text{Pic}_{\mathcal{X}/S}$  le soit, même lorsque la gerbe  $\mathcal{X}$  est triviale. Cependant si  $f$  est ouvert, dominant et à fibres géométriquement connexes, alors  $f_*\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ . C'est le cas par exemple lorsque  $f$  est localement de type fini, plat et cohomologiquement plat en dimension zéro.

On suppose maintenant que  $f_*\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  coïncide avec  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  et l'on considère le produit  $\text{Pic}_{X/S} \times_S \mathbb{Z}$  de  $\text{Pic}_{X/S}$  par le groupe constant  $\mathbb{Z}$ . On va voir que  $\text{Pic}_{\mathcal{X}/S}$  est isomorphe au quotient de  $\text{Pic}_{X/S} \times_S \mathbb{Z}$  par la relation  $\omega^n = l$ . On note  $H$  le sous-groupe engendré par  $(l^{-1}, n)$ . Le foncteur  $\text{Pic}_{X/S} \times_S \mathbb{Z}$  s'identifie à une union disjointe  $\coprod_{i \in \mathbb{Z}} (\text{Pic}_{X/S})_i$  de copies de  $\text{Pic}_{X/S}$  indexées par  $\mathbb{Z}$ . Pour tout  $i$  appartenant à  $\mathbb{Z}$ , on note  $\mu_{\omega^i}$  le morphisme de multiplication par  $\omega^i$  de  $\text{Pic}_{\mathcal{X}/S}$  dans lui-même, et on note  $\varphi_i$  le morphisme composé

$$\text{Pic}_{X/S} \xrightarrow{\varphi_0} \text{Pic}_{\mathcal{X}/S} \xrightarrow{\mu_{\omega^i}} \text{Pic}_{\mathcal{X}/S}.$$

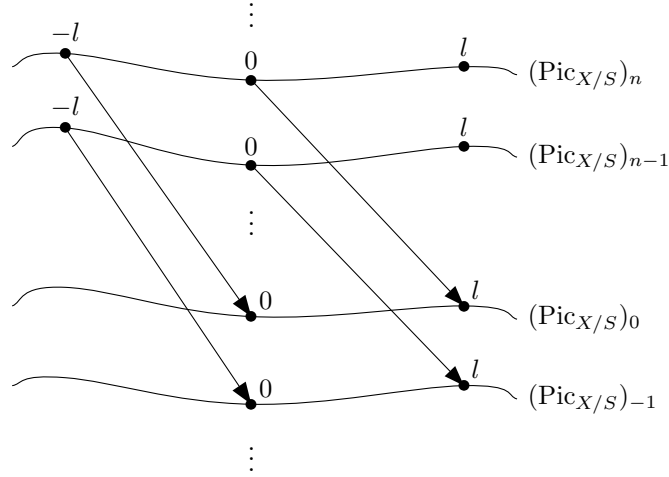
La collection des  $\varphi_i$  définit donc un morphisme

$$\varphi : \text{Pic}_{X/S} \times_S \mathbb{Z} \longrightarrow \text{Pic}_{\mathcal{X}/S}$$

dont il est clair qu'il est invariant sous  $H$ . On vérifie facilement avec les suites exactes précédentes qu'il est universel pour les morphismes invariants sous  $H$  de  $\text{Pic}_{X/S} \times_S \mathbb{Z}$  à valeurs dans un  $S$ -schéma  $T$ . Le foncteur  $\text{Pic}_{\mathcal{X}/S}$  s'identifie donc bien au quotient évoqué ci-dessus. On peut construire ce quotient « à la main » comme suit (voir figure ci-dessous). Pour tout couple d'entiers  $(i, k)$  on identifie les copies de  $\text{Pic}_{X/S}$  numéro  $i$  et  $i + nk$  via l'isomorphisme de translation

$$(\text{Pic}_{X/S})_{i+nk} \xrightarrow{\mu_{lk}} (\text{Pic}_{X/S})_i .$$

La loi de groupe est induite naturellement par celle de  $\text{Pic}_{X/S}$  et par la relation  $\omega^n = l$ .



Le foncteur de Picard de  $[\mathcal{L}^{\frac{1}{n}}]$

Ceci montre en particulier que si  $\text{Pic}_{X/S}$  est représentable, alors  $\text{Pic}_{\mathcal{X}/S}$  l'est aussi<sup>1</sup>.

#### DESCRIPTION DU CHAMP DE PICARD DE $[\mathcal{L}^{\frac{1}{n}}]$

On a une « suite exacte » de champs de Picard :

$$1 \longrightarrow \mathcal{P}ic(X/S) \xrightarrow{\pi^*} \mathcal{P}ic(\mathcal{X}/S) \xrightarrow{\chi} f_*\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow 1. \quad (5.2)$$

Autrement dit,  $\pi^*$  est pleinement fidèle,  $\chi$  est un épimorphisme, et si  $\mathcal{F}$  est un objet de  $\mathcal{P}ic(\mathcal{X}/S)$ , il provient de  $\mathcal{P}ic(X/S)$  si et seulement si son caractère  $\chi_{\mathcal{F}}$  est nul. Tout ceci a déjà été prouvé. De même que précédemment, si l'on suppose que  $f_*\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ , alors le champ  $\mathcal{P}ic(\mathcal{X}/S)$  s'identifie au champ obtenu à partir de  $\mathcal{P}ic(X/S) \times_S \mathbb{Z}$  en recollant les copies numéro  $i$  et  $i + nk$  le long de l'isomorphisme

$$(\mathcal{P}ic(X/S))_{i+nk} \xrightarrow{\mu_{lk}} (\mathcal{P}ic(X/S))_i$$

1. Mais bien sûr, on le savait déjà dans le cas où  $f$  est propre, plat et cohomologiquement plat en dimension zéro.

pour tous  $i, k$  appartenant à  $\mathbb{Z}$ . En particulier il suffit dans ce cas que  $\mathcal{P}ic(X/S)$  soit algébrique pour que  $\mathcal{P}ic(\mathcal{X}/S)$  le soit aussi.

Dans le cas où  $\mathcal{L}$  a une racine  $n^{\text{ième}}$   $\mathcal{R}$  sur  $X$ , la suite exacte (5.2) est scindée et  $\mathcal{P}ic(\mathcal{X}/S)$  s'identifie au produit  $\mathcal{P}ic(X/S) \times_S f_* \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ .

### 5.3 Courbes tordues d'Abramovich et Vistoli

Abramovich et Vistoli ont mis au jour dans [6], [7] et [8] une classe de courbes « tordues » qui apparaissent naturellement lorsque l'on cherche à compactifier certains espaces de modules. Ces courbes sont des courbes nodales munies d'une « structure champêtre » supplémentaire aux points singuliers ou en certains points marqués. Nous nous proposons de décrire le foncteur de Picard des courbes tordues *lisses*<sup>2</sup>. Nous allons voir que la structure supplémentaire modifie le foncteur de Picard de la courbe d'une manière très analogue à ce que nous avons pu observer dans la section précédente. Nous commençons par quelques rappels sur les courbes tordues.

#### 5.3.1 Rappel des définitions et propriétés élémentaires

**Définition 5.3.1.1** ([8] 4.1.2 ou [47] 1.2) *Soit  $S$  un schéma. Une courbe tordue sur  $S$  est un champ de Deligne-Mumford  $f : \mathcal{C} \rightarrow S$  modéré, propre, plat et de présentation finie sur  $S$  dont les fibres sont purement de dimension 1, géométriquement connexes et ont au plus des singularités nodales, vérifiant de plus les propriétés suivantes :*

- 1) *Si  $\pi : \mathcal{C} \rightarrow C$  est l'espace de modules grossier de  $\mathcal{C}$  et si  $C_{\text{lis}}$  est le lieu lisse de  $C$  sur  $S$ , alors le sous-champ ouvert  $\mathcal{C} \times_C C_{\text{lis}}$  est le lieu lisse de  $\mathcal{C}$  sur  $S$ .*
- 2) *Pour tout point géométrique  $\bar{s} \rightarrow S$  le morphisme induit  $\mathcal{C}_{\bar{s}} \rightarrow C_{\bar{s}}$  est un isomorphisme au-dessus d'un ouvert dense de  $C_{\bar{s}}$ .*

*Une courbe tordue  $n$ -pointée est une courbe tordue munie d'une collection  $\{\Sigma_i\}_{i=1}^n$  de sous-champs fermés de  $\mathcal{C}$  deux à deux disjoints tels que :*

- (i) *Pour tout  $i$ , le sous-champ fermé  $\Sigma_i$  est dans le lieu lisse de  $\mathcal{C}$ .*
- (ii) *Pour tout  $i$ , le morphisme  $\Sigma_i \rightarrow \mathcal{C} \rightarrow S$  est une gerbe étale sur  $S$ .*
- (iii) *Si  $\mathcal{C}_{\text{gén}}$  est l'ouvert complémentaire des  $\Sigma_i$  dans  $\mathcal{C}_{\text{lis}}$ , alors  $\mathcal{C}_{\text{gén}}$  est un schéma.*

**Remarque 5.3.1.2** On rappelle qu'un champ de Deligne-Mumford est dit modéré si pour tout corps algébriquement clos  $k$  et tout morphisme  $x : \text{Spec } k \rightarrow \mathcal{C}$  le groupe  $\text{Aut}(x)$  est d'ordre inversible dans  $k$ .

**Remarque 5.3.1.3** D'après la proposition 4.1.1 de [8], l'espace de modules grossier  $C$  est une courbe nodale propre et plate sur  $S$ , de présentation finie et à fibres géométriquement connexes. Si de plus la courbe  $\mathcal{C}$  est  $n$ -pointée, alors l'espace de modules grossier  $D_i$  du sous-champ fermé  $\Sigma_i$  est naturellement un sous-schéma fermé de  $C$ , et le morphisme composé  $D_i \rightarrow C \rightarrow S$  est un isomorphisme. Les  $D_i$  définissent donc des sections de  $C \rightarrow S$  qui en font une courbe nodale  $n$ -pointée au sens usuel.

**Théorème 5.3.1.4** ([8] 3.2.3 ou [47] 2.2) *Au voisinage (étale) d'un point marqué, la courbe  $\mathcal{C} \rightarrow S$  est de la forme  $[U/\mu_r] \rightarrow \text{Spec } A$  où  $U = \text{Spec } A[x]$  et où un générateur de  $\mu_r$  agit sur  $U$  par  $x \mapsto \xi \cdot x$  avec  $\xi$  une racine primitive  $r^{\text{ième}}$  de l'unité.*

*Au voisinage d'un nœud, la courbe  $\mathcal{C} \rightarrow S$  est de la forme  $[U/\mu_r] \rightarrow \text{Spec } A$  où  $U = \text{Spec } (A[x, y]/(xy - t))$  pour un certain  $t \in A$  et où un générateur de  $\mu_r$  agit sur  $U$  par  $(x, y) \mapsto (\xi \cdot x, \xi' \cdot y)$  avec  $\xi$  et  $\xi'$  des racines primitives  $r^{\text{ièmes}}$  de l'unité.*

2. Nous espérons traiter le cas général dans un avenir proche.

**Remarque 5.3.1.5** Si  $p \in C$  est un nœud fixé, et si  $\xi$  et  $\xi'$  sont les racines primitives  $r_i^{\text{ièmes}}$  de l'unité qui apparaissent ci-dessus, on dit que le nœud  $p$  est « balancé » si le produit  $\xi \cdot \xi'$  est égal à 1. On dit que la courbe  $\mathcal{C}$  est balancée si tous ses nœuds sont balancés. Signalons que si  $p$  n'est pas balancé, on a nécessairement  $t = 0$  dans la description locale ci-dessus. Autrement dit on ne peut pas faire disparaître le nœud en déformant la courbe ([47] 2.2).

Signalons qu'Olsson montre dans [47] que se donner une courbe tordue revient à se donner une courbe nodale classique munie d'une certaine « structure logarithmique ». Pour les courbes tordues lisses, Cadman donne une autre description, plus élémentaire.

**Théorème 5.3.1.6 ([16] 2.2.4 et 4.1)** *Se donner une courbe tordue  $(\mathcal{C}, \{\Sigma_i\}_{i=1}^n)$   $n$ -pointée lisse sur un schéma  $S$  noethérien et connexe est équivalent à se donner une courbe  $n$ -pointée  $(C, \{\sigma_i\}_{i=1}^n)$  lisse sur  $S$  et un  $n$ -uplet  $\vec{r} = (r_1, \dots, r_n)$  d'entiers strictement positifs inversibles sur  $S$ . La courbe tordue  $\mathcal{C}$  est alors isomorphe au champ  $C_{\mathbb{D}, \vec{r}}$  défini de la manière suivante.*

Chaque section  $\sigma_i$  définit un diviseur de Cartier effectif  $D_i$  de  $C$ . On note  $s_{D_i}$  la section canonique de  $\mathcal{O}(D_i)$  qui s'annule sur  $D_i$ . La collection des  $\mathcal{O}(D_i)$  et des  $s_{D_i}$  correspond à un morphisme  $C \rightarrow [\mathbb{A}^n / \mathbb{G}_m^n]$ . On note aussi  $\theta_{\vec{r}}$  le morphisme de  $[\mathbb{A}^n / \mathbb{G}_m^n]$  dans lui-même qui envoie un  $n$ -uplet de faisceaux inversibles  $(L_1, \dots, L_n)$  muni de sections  $(t_1, \dots, t_n)$  sur le  $n$ -uplet  $(L_1^{r_1}, \dots, L_n^{r_n})$  muni de  $(t_1^{r_1}, \dots, t_n^{r_n})$ . On définit alors  $C_{\mathbb{D}, \vec{r}}$  comme étant le produit fibré

$$C \times_{[\mathbb{A}^n / \mathbb{G}_m^n], \theta_{\vec{r}}} [\mathbb{A}^n / \mathbb{G}_m^n].$$

### 5.3.2 Description du foncteur de Picard des courbes tordues lisses

Cadman décrit dans [16] les faisceaux inversibles sur une courbe tordue lisse sur une base connexe et noethérienne (corollaire 3.2.1) : un faisceau inversible sur  $C_{\mathbb{D}, \vec{r}}$  s'écrit de manière unique sous la forme  $\pi^* L \otimes \prod_{i=1}^n \mathcal{I}_i^{\otimes k_i}$  où  $\pi : \mathcal{C} \rightarrow C$  est la projection de  $\mathcal{C}$  sur son espace de modules grossier,  $L$  est un faisceau inversible sur  $C$ ,  $\mathcal{I}_i$  est le faisceau inversible  $\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(\Sigma_i)$  et  $k_i$  est un entier compris entre 0 et  $r_i - 1$ . Il est clair que les hypothèses noethériennes ne sont pas essentielles pour ce résultat. Par ailleurs on peut aussi supprimer l'hypothèse de connexité sur la base : il faut alors remplacer les entiers  $k_i$  par des fonctions localement constantes à valeurs dans  $\mathbb{Z}$ . On obtient ainsi le théorème suivant.

**Théorème 5.3.2.1** *Soient  $S$  un schéma,  $C$  une courbe lisse  $n$ -pointée sur  $S$ ,  $\vec{r}$  un  $n$ -uplet d'entiers strictement positifs et  $C_{\mathbb{D}, \vec{r}}$  la courbe tordue associée par la construction de Cadman. Soit  $\mathcal{L}$  un faisceau inversible sur  $C_{\mathbb{D}, \vec{r}}$ . Alors il existe un faisceau inversible  $L$  sur  $C$  et des fonctions localement constantes  $k_i$  appartenant à  $H^0(S, \mathbb{Z})$  prenant leurs valeurs dans  $\{0, \dots, r_i - 1\}$  tels que*

$$\mathcal{L} \simeq \pi^* L \otimes \prod_{i=1}^n \mathcal{I}_i^{k_i}.$$

*De plus les fonctions  $k_i$  sont uniques,  $L$  est unique à isomorphisme près, et  $\mathcal{I}_i^{r_i}$  est isomorphe à  $\pi^* \mathcal{O}(D_i)$ .  $\square$*

En particulier on a une suite exacte courte :

$$0 \longrightarrow \text{Pic}(C) \longrightarrow \text{Pic}(\mathcal{C}) \longrightarrow \prod_{i=1}^n H^0(S, \mathbb{Z}/r_i \mathbb{Z}) \longrightarrow 0.$$



Signalons que si  $S$  est le spectre d'un corps algébriquement clos, Chiodo ([18]) obtient cette suite exacte d'une autre manière pour une courbe tordue quelconque.

Soit  $(\mathcal{C}, \{\Sigma_i\}_{i=1}^n)$  une courbe tordue  $n$ -pointée lisse sur une base  $S$  noethérienne et connexe. D'après le théorème 5.3.1.6,  $\mathcal{C}$  est isomorphe au champ  $C_{\mathbb{D}, \vec{r}}$  où  $C$  est l'espace de modules grossier de  $\mathcal{C}$ ,  $\vec{r}$  est un  $n$ -uplet d'entiers positifs et  $\mathbb{D} = (D_1, \dots, D_n)$  est le  $n$ -uplet de diviseurs effectifs de Cartier de  $C$  correspondant aux  $\Sigma_i$ . Pour tout  $i$  le morphisme de  $D_i$  vers  $S$  est un isomorphisme. On note  $\mathcal{T}_i$  le faisceau  $\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(\Sigma_i)$ . Alors toutes ces données sont compatibles au changement de base. Plus précisément, si  $T \rightarrow S$  est un morphisme de changement de base, le produit fibré  $\mathcal{C} \times_S T$  est isomorphe au champ  $C'_{\mathbb{D}', \vec{r}}$  où  $C'$  (resp.  $D'_i$ ) est le produit fibré  $C \times_S T$  (resp.  $D_i \times_S T$ ) et  $\mathbb{D}' = (D'_1, \dots, D'_n)$ . De plus le faisceau inversible canonique  $\mathcal{T}'_i$  n'est autre que  $\Phi^* \mathcal{T}_i$  où  $\Phi$  est la projection de  $\mathcal{C}'$  sur  $\mathcal{C}$ . En appliquant le théorème précédent à la courbe  $\mathcal{C}'$ , on obtient pour tout  $T$  une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow \mathrm{Pic}(C \times_S T) \longrightarrow \mathrm{Pic}(\mathcal{C} \times_S T) \longrightarrow \prod_{i=1}^n H^0(T, \mathbb{Z}/r_i \mathbb{Z}) \longrightarrow 0,$$

autrement dit on a une suite exacte courte de préfaisceaux

$$0 \longrightarrow \mathrm{Pic}_C \longrightarrow \mathrm{Pic}_{\mathcal{C}} \longrightarrow \prod_{i=1}^n \mathbb{Z}/r_i \mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

En appliquant le foncteur « faisceau associé pour la topologie étale » on en déduit une suite exacte courte de faisceaux étales :

$$0 \longrightarrow \mathrm{Pic}_{C/S} \longrightarrow \mathrm{Pic}_{\mathcal{C}/S} \longrightarrow \prod_{i=1}^n \mathbb{Z}/r_i \mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

Notons  $l_i$  la classe de  $\mathcal{O}_C(D_i)$  dans  $\mathrm{Pic}_{C/S}(S)$  et  $t_i$  la classe de  $\mathcal{T}_i$  dans  $\mathrm{Pic}_{\mathcal{C}/S}(S)$ . On a dans  $\mathrm{Pic}_{\mathcal{C}/S}$  la relation  $t_i^{r_i} = l_i$ . En procédant comme pour le cas du champ  $[\mathcal{L}^{\frac{1}{n}}]$ , on voit que le foncteur  $\mathrm{Pic}_{\mathcal{C}/S}$  s'identifie au foncteur quotient de  $\mathrm{Pic}_{C/S} \times_S \mathbb{Z}^n$  par les relations  $t_i^{r_i} = l_i$  (où par abus les  $t_1, \dots, t_n$  désignent aussi les générateurs canoniques de  $\mathbb{Z}^n$ ). On peut construire ce quotient à la main comme suit. Le produit  $\mathrm{Pic}_{C/S} \times_S \mathbb{Z}^n$  est une union disjointe de copies de  $\mathrm{Pic}_{C/S}$  indexées par les  $n$ -uplets  $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  appartenant à  $\mathbb{Z}^n$ . Alors  $\mathrm{Pic}_{\mathcal{C}/S}$  est obtenu en identifiant pour tout  $\underline{\alpha}$ , pour tout entier  $k$  appartenant à  $\mathbb{Z}$  et pour tout entier  $i$  compris entre 1 et  $n$ , les copies  $(\mathrm{Pic}_{C/S})_{\underline{\alpha}}$  et  $(\mathrm{Pic}_{C/S})_{(\alpha_1, \dots, \alpha_i + kr_i, \dots, \alpha_n)}$  via l'isomorphisme de multiplication par  $l_i$  :

$$(\mathrm{Pic}_{C/S})_{(\alpha_1, \dots, \alpha_i + kr_i, \dots, \alpha_n)} \xrightarrow{\mu_{l_i}} (\mathrm{Pic}_{C/S})_{\underline{\alpha}}$$

La loi de groupe est évidente.

**Remarque 5.3.2.2** Si l'on ne tient pas compte de la structure de groupe, on voit que  $\mathrm{Pic}_{\mathcal{C}/S}$  s'identifie à une union disjointe de  $r_1 \dots r_n$  copies de  $\mathrm{Pic}_{C/S}$ .

**Remarque 5.3.2.3** La composante neutre de  $\mathrm{Pic}_{\mathcal{C}/S}$  est la même que celle de  $\mathrm{Pic}_{C/S}$ . Autrement dit, le morphisme de  $\mathrm{Pic}_{C/S}$  vers  $\mathrm{Pic}_{\mathcal{C}/S}$  induit un isomorphisme naturel :

$$\mathrm{Pic}_{C/S}^0 \xrightarrow{\sim} \mathrm{Pic}_{\mathcal{C}/S}^0.$$

# Annexes

Ainsi qu'il a été dit en introduction, la présente annexe rassemble les résultats relatifs à la cohomologie des faisceaux sur les champs algébriques nécessaires au texte principal. Voici en résumé la liste des sujets qui y sont abordés.

- Les deux premières sections rappellent les définitions du topos lisse-étale et du couple de foncteurs adjoints  $(f^{-1}, f_*)$  associé à un morphisme  $f$  de champs algébriques. La seule nouveauté est la vérification du fait que sur un champ de Deligne-Mumford, les groupes de cohomologie lisse-étale coïncident avec les groupes de cohomologie étale.
- Section A.1.3 : Nous introduisons un nouveau site, le site lisse-lisse champêtre, dont les objets sont les morphismes représentables et lisses  $\mathcal{U} \rightarrow \mathcal{X}$  de *champs algébriques*. Il définit le même topos que le site lisse-étale mais présente au moins deux avantages : il se comporte mieux vis-à-vis des images directes et il a un objet final.
- Section A.1.4 : C'est au départ la nécessité de disposer de techniques de descente cohomologique à la Deligne-Saint-Donat qui a motivé ce travail. Nous avions en particulier besoin d'un analogue pour les champs algébriques de la suite spectrale de descente relative à un morphisme lisse et surjectif de schémas. Il s'est finalement avéré que l'introduction du site lisse-lisse champêtre rendait ce résultat presque trivial (voir proposition A.1.4.1).
- Sections A.1.5 et A.1.6 : Nous décrivons ici une classe de faisceaux acycliques adaptée aux particularités du site lisse-étale. Ces faisceaux « Llc-acycliques » nous sont surtout utiles pour obtenir la suite spectrale de Leray relative à un morphisme de champs algébriques (thm. A.1.6.4). Nous montrons aussi que les images directes supérieures d'un faisceau lisse-étale abélien peuvent être calculées comme l'on imagine (cf. prop. A.1.6.1).
- Section A.1.7 : La formation des groupes de cohomologie et des images directes supérieures commute au changement de base plat.
- Section A.1.8 : Il est d'usage, lorsque  $i : X \rightarrow \tilde{X}$  est une extension infinitésimale, d'identifier les catégories de faisceaux Zariski sur  $X$  et sur  $\tilde{X}$ . Ceci est tout à fait légitime puisque  $X$  et  $\tilde{X}$  ont le même espace topologique sous-jacent. Mieux : le foncteur qui à un ouvert étale  $\tilde{U}$  de  $\tilde{X}$  associe l'ouvert étale  $\tilde{U} \times_{\tilde{X}} X$  de  $X$  définit une équivalence entre les sites étales de  $\tilde{X}$  et de  $X$ , ce qui permet d'identifier aussi les faisceaux étales. Il faut faire nettement plus attention avec la topologie lisse-étale. On peut en effet vérifier facilement que le foncteur ci-dessus n'est même pas fidèle. Heureusement, on peut tout de même identifier les groupes de cohomologie des faisceaux abéliens sur  $X$  et sur  $\tilde{X}$  via le foncteur  $i_*$  (cf. A.1.8.1). Cette section contient également un résultat analogue pour les images directes supérieures.
- Section A.1.9 : On y trouvera un résultat technique utilisé dans la section suivante. Plus précisément, soit  $\mathcal{F}$  un faisceau sur le site lisse-lisse champêtre d'un champ

algébrique  $\mathcal{X}$ . On suppose qu'il existe une présentation  $X \twoheadrightarrow \mathcal{X}$  de  $\mathcal{X}$  telle que la restriction de  $\mathcal{F}$  au site lisse de  $X$  soit représentable par un espace algébrique lisse sur  $X$ . Alors  $\mathcal{F}$  est lui-même représentable par un unique champ algébrique lisse sur  $\mathcal{X}$ .

- Section A.1.10 : On y décrit les toiseurs du topos lisse-étale et l'on constate dans le cas particulier d'un groupe lisse sur la base  $S$  que le  $H^1$  au sens des foncteurs dérivés coïncide avec le groupe des classes de toiseurs.
- Section A.2 : Après quelques généralités sur la cohomologie plate sur les champs algébriques, nous donnons principalement deux résultats. D'une part la suite spectrale qui relie la cohomologie plate à la cohomologie lisse-étale, et d'autre part la généralisation aux champs algébriques du théorème de Grothendieck suivant lequel dans le cas d'un groupe lisse, la cohomologie plate coïncide avec la cohomologie étale (cf. [2], exposé VI, paragraphe 11).

## A.1 Cohomologie lisse-étale sur les champs algébriques

### A.1.1 Cohomologie des faisceaux

Rappelons brièvement, pour la commodité du lecteur, la définition du site lisse-étale d'un champ algébrique donnée au chapitre 12 de [38].

**Définition A.1.1.1** Soit  $\mathcal{X}$  un  $S$ -champ algébrique. On appelle site lisse-étale de  $\mathcal{X}$  et on note  $\text{Lis-ét}(\mathcal{X})$  le site défini comme suit.

Les ouverts lisses-étales de  $\mathcal{X}$  sont les couples  $(U, u)$  où  $U$  est un  $S$ -espace algébrique et  $u : U \twoheadrightarrow \mathcal{X}$  un morphisme représentable et lisse. Une flèche entre deux tels ouverts  $(U, u)$  et  $(V, v)$  est un couple  $(\varphi, \alpha)$  faisant 2-commuter le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\varphi} & V \\ & \searrow u \quad \nearrow v & \\ & \mathcal{X} & \end{array}$$

Une famille couvrante de  $(U, u)$  est une collection de morphismes

$$((\varphi_i, \alpha_i) : (U_i, u_i) \longrightarrow (U, u))_{i \in I}$$

telle que le 1-morphisme d'espaces algébriques

$$\coprod_{i \in I} \varphi_i : \coprod_{i \in I} U_i \longrightarrow U$$

soit étale et surjectif.

Le site étale de  $\mathcal{X}$ , noté  $\acute{\text{Et}}(\mathcal{X})$ , est la sous-catégorie pleine de  $\text{Lis-ét}(\mathcal{X})$  dont les objets sont les couples  $(U, u)$  où  $u$  est un morphisme étale, munie de la topologie induite par celle de  $\text{Lis-ét}(\mathcal{X})$ .

**Remarque A.1.1.2** Notons  $(.)_{\acute{\text{et}}}$  l'opération de restriction des préfaisceaux ou faisceaux lisses-étales au site étale de  $\mathcal{X}$ . Notons encore  $\underline{a}$  le foncteur « faisceau associé » (le contexte devant lever toute ambiguïté sur le site concerné, étale ou lisse-étale). Maintenant si  $\mathcal{F}$  est un préfaisceau sur le site lisse-étale de  $\mathcal{X}$ , on a un isomorphisme canonique :

$$\underline{a}(\mathcal{F}_{\acute{\text{et}}}) \xrightarrow{\sim} (\underline{a}\mathcal{F})_{\acute{\text{et}}} .$$

Ceci est essentiellement dû au fait que si  $(U, u)$  est un ouvert étale de  $\mathcal{X}$  et si  $((\varphi_i, \alpha_i) : (U_i, u_i) \rightarrow (U, u))_i$  est une famille couvrante dans  $\text{Lis-ét}(\mathcal{X})$ , alors les  $U_i$  sont étales sur  $\mathcal{X}$  et la famille considérée est couvrante dans  $\text{Ét}(\mathcal{X})$ .

On notera encore  $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$  le faisceau structural de  $\mathcal{X}$  défini en (12.7.1) dans [38]. Si  $\mathcal{A}$  est un faisceau d'anneaux sur  $\text{Lis-ét}(\mathcal{X})$ , on notera  $\text{Mod}_{\mathcal{A}}(\mathcal{X})$  la catégorie des faisceaux de  $\mathcal{A}$ -modules sur le site lisse-étale de  $\mathcal{X}$ , ou plus simplement  $\text{Mod}(\mathcal{X})$  lorsque  $\mathcal{A} = \mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ . La catégorie des faisceaux abéliens sera notée  $\text{Ab}(\mathcal{X})$ .

**Proposition A.1.1.3** *La catégorie  $\text{Mod}_{\mathcal{A}}(\mathcal{X})$  est une catégorie abélienne avec suffisamment d'objets injectifs. En particulier il en est ainsi des catégories  $\text{Mod}(\mathcal{X})$  et  $\text{Ab}(\mathcal{X})$ .*

**Démonstration.** [3] II (6.7) et [26] théorème (1.10.1).  $\square$

On rappelle que le foncteur « sections globales » est défini de la manière suivante. Si  $\mathcal{F}$  est un faisceau lisse-étale sur  $\mathcal{X}$ , l'ensemble  $\Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{F})$  est l'ensemble des familles  $(s_{(U, u)})$  de sections de  $\mathcal{F}$  sur les  $(U, u) \in \text{ob Lis-ét}(\mathcal{X})$  qui sont compatibles aux flèches de restriction en un sens évident (cf. [38] (12.5.3)). On vérifie immédiatement que le foncteur  $\Gamma(\mathcal{X}, \cdot) : \text{Ab}(\mathcal{X}) \rightarrow \text{Ab}$  est exact à gauche. On définit alors  $H^i(\mathcal{X}, \cdot)$  comme étant le  $i^{\text{ème}}$  foncteur dérivé à droite de  $\Gamma(\mathcal{X}, \cdot)$ .

**Proposition A.1.1.4** *Sur la catégorie  $\text{Mod}(\mathcal{X})$ , le foncteur  $H^i(\mathcal{X}, \cdot)$  coïncide avec le  $i^{\text{ème}}$  foncteur dérivé à droite de  $\Gamma(\mathcal{X}, \cdot) : \text{Mod}(\mathcal{X}) \rightarrow \text{Ab}$ .*

**Démonstration.** [4] V (3.5).  $\square$

Nous espérons ici que le lecteur a présents à l'esprit les résultats (12.2.1) et (12.3.3) de [38], ainsi que les notations qui y sont introduites. Si tel n'était pas le cas, nous l'invitons à se les remémorer.

**Lemme A.1.1.5** *Soit  $\mathcal{X}$  un  $S$ -champ de Deligne-Mumford et soient  $\mathcal{F}, \mathcal{G}$  des faisceaux lisses-étales d'ensembles (resp. de groupes abéliens) sur  $\mathcal{X}$ . On suppose que  $\mathcal{F}$  est cartésien. Alors l'application*

$$\text{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \longrightarrow \text{Hom}(\mathcal{F}_{\text{ét}}, \mathcal{G}_{\text{ét}})$$

*induite par le foncteur d'inclusion  $\text{Ét}(\mathcal{X}) \hookrightarrow \text{Lis-ét}(\mathcal{X})$  est bijective.*

**Démonstration.** Soit  $g : \mathcal{F}_{\text{ét}} \rightarrow \mathcal{G}_{\text{ét}}$  un morphisme de faisceaux (resp. de faisceaux abéliens). Il est donné par la collection des  $g_{U, u} : \mathcal{F}_{U, u} \rightarrow \mathcal{G}_{U, u}$  pour  $(U, u) \in \text{ob Ét}(\mathcal{X})$ , ces morphismes  $g_{U, u}$  satisfaisant de plus à une condition de compatibilité évidente avec les morphismes de changement de base  $\theta_{\varphi, \alpha}$  pour tout morphisme  $(\varphi, \alpha)$  dans  $\text{Ét}(\mathcal{X})$ . Il faut montrer que  $g$  se prolonge de manière unique en un morphisme de faisceaux lisses-étales. Soit  $(U, u) \in \text{ob Lis-ét}(\mathcal{X})$ . Soit  $P : X \rightarrow \mathcal{X}$  une présentation étale de  $\mathcal{X}$ . On note

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\psi} & X \\ \varphi \downarrow & \square & \downarrow P \\ U & \xrightarrow{u} & \mathcal{X}, \end{array}$$

et on pose  $v = P \circ \psi$ . Un morphisme  $h$  qui prolonge  $g$  fait nécessairement commuter le diagramme suivant<sup>3</sup> :

$$\begin{array}{ccc} \psi^{-1}\mathcal{F}_{X,P} & \xrightarrow{\psi^{-1}(g_{X,P})} & \psi^{-1}\mathcal{G}_{X,P} \\ \theta_{\psi,\mathcal{F}}^{\natural} \downarrow & & \downarrow \theta_{\psi,\mathcal{G}}^{\natural} \\ \mathcal{F}_{V,v} & \xrightarrow{h_{V,v}} & \mathcal{G}_{V,v} \end{array}$$

Comme  $\mathcal{F}$  est cartésien,  $\theta_{\psi,\mathcal{F}}^{\natural}$  est un isomorphisme, donc  $h_{V,v}$  est déterminé de manière unique par  $h_{V,v} = \theta_{\psi,\mathcal{G}}^{\natural} \circ (\psi^{-1}g_{X,P}) \circ (\theta_{\psi,\mathcal{F}}^{\natural})^{-1}$ . Le diagramme analogue obtenu à partir du morphisme  $\varphi$  nous donne  $\varphi^{-1}(h_{U,u}) = (\theta_{\varphi,\mathcal{G}}^{\natural})^{-1} \circ h_{V,v} \circ \theta_{\varphi,\mathcal{F}}^{\natural}$  (où  $\theta_{\varphi,\mathcal{G}}^{\natural}$  est un isomorphisme parce que  $\varphi$  est étale). Comme  $\varphi$  est étale surjectif, le foncteur  $\varphi^{-1}$  est pleinement fidèle de sorte que la relation précédente détermine de manière unique le morphisme  $h_{U,u}$ . On vérifie facilement que si  $(U, u)$  et  $(U', u')$  sont deux ouverts lisses-étales et si  $\varphi : U' \rightarrow U$  est un morphisme entre ces ouverts, alors le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \varphi^{-1}\mathcal{F}_{U,u} & \xrightarrow{\varphi^{-1}h_{U,u}} & \varphi^{-1}\mathcal{G}_{U,u} \\ \theta_{\varphi,\mathcal{F}}^{\natural} \downarrow & & \downarrow \theta_{\varphi,\mathcal{G}}^{\natural} \\ \mathcal{F}_{U',u'} & \xrightarrow{h_{U',u'}} & \mathcal{G}_{U',u'}. \end{array}$$

En d'autres termes, la collection des  $h_{U,u}$  ainsi construits définit bien un morphisme de faisceaux lisses-étales de  $\mathcal{F}$  dans  $\mathcal{G}$  qui prolonge  $g$ .  $\square$

**Remarque A.1.1.6** Le résultat est faux si on ne suppose pas  $\mathcal{F}$  cartésien. Il suffit de considérer un faisceau lisse-étale abélien  $\mathcal{F}$  non nul tel que  $\mathcal{F}_{\text{ét}}$  soit nul. Alors, dans  $\text{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{F})$  on a au moins deux éléments distincts, à savoir l'identité et le morphisme nul, tandis que  $\text{Hom}(\mathcal{F}_{\text{ét}}, \mathcal{F}_{\text{ét}})$  est réduit à zéro. Pour exhiber un tel faisceau, on peut par exemple prendre  $\mathcal{X} = \text{Spec } k$ , le spectre d'un corps, et poser  $\mathcal{F}(U, u) = \Omega_{U/k}$ .

**Corollaire A.1.1.7** Soient  $\mathcal{X}$  un  $S$ -champ algébrique et  $\mathcal{F}$  un faisceau lisse-étale sur  $\mathcal{X}$ . Alors le morphisme canonique

$$\Gamma_{\text{lis-ét}}(\mathcal{X}, \mathcal{F}) \longrightarrow \Gamma_{\text{ét}}(\mathcal{X}, \mathcal{F})$$

est un isomorphisme.

**Démonstration.** Il suffit juste d'appliquer (A.1.1.5) en prenant pour  $\mathcal{F}$  le faisceau final, i.e. le faisceau qui à tout ouvert lisse-étale associe un singleton. Il est clair que ce faisceau est bien cartésien.  $\square$

**Corollaire A.1.1.8** Soit  $\mathcal{X}$  un  $S$ -champ de Deligne-Mumford, et soit  $\mathcal{F}$  un objet injectif de la catégorie des faisceaux lisses-étales abéliens sur  $\mathcal{X}$ . Alors la restriction  $\mathcal{F}_{\text{ét}}$  de  $\mathcal{F}$  au site étale de  $\mathcal{X}$  est un objet injectif de la catégorie des faisceaux étales abéliens.

---

3. Afin de ne pas alourdir l'exposé, nous avons cru bon de ne pas préciser les 2-isomorphismes dans les morphismes entre ouverts lisses-étales. Nous notons donc  $\theta_{\varphi}$  au lieu de  $\theta_{\varphi,\alpha}$ . Une notation comme  $\theta_{\psi,\mathcal{F}}$  désigne alors le  $\theta_{\varphi}$  relatif à  $\mathcal{F}$ .

**Démonstration.** Soit  $0 \rightarrow \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}'$  une suite exacte de faisceaux étales, et soit  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{F}_{\text{ét}}$  un morphisme donné. Il s'agit de montrer que  $f$  se prolonge en un morphisme  $\mathcal{M}' \rightarrow \mathcal{F}_{\text{ét}}$ . D'après [38] (12.3.3), le foncteur d'inclusion  $\text{Ét}(\mathcal{X}) \rightarrow \text{Lis-ét}(\mathcal{X})$  induit une équivalence de catégories  $\mathcal{X}_{\text{lis-ét, cart}} \rightarrow \mathcal{X}_{\text{ét}}$ . De plus cette équivalence préserve les faisceaux abéliens, de sorte qu'elle induit une équivalence de la sous-catégorie pleine de  $\text{Ab}(\mathcal{X})$  dont les objets sont les faisceaux abéliens cartésiens, sur la catégorie  $\text{Ab}_{\text{ét}}(\mathcal{X})$  des faisceaux étales abéliens. Il existe donc un morphisme de faisceaux lisses-étales cartésiens  $\widetilde{\mathcal{M}} \rightarrow \widetilde{\mathcal{M}'}$  qui par restriction au site étale de  $\mathcal{X}$  induit  $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}'$ . De plus si  $(U, u)$  est un ouvert lisse-étale de  $\mathcal{X}$ , le morphisme  $\widetilde{\mathcal{M}}_{U, u} \rightarrow \widetilde{\mathcal{M}'}_{U, u}$  est par construction égal au morphisme  $u^{-1}\mathcal{M} \rightarrow u^{-1}\mathcal{M}'$ , où  $u$  est considéré comme un morphisme de topos de  $U_{\text{ét}}$  dans  $\mathcal{X}_{\text{ét}}$ . Le foncteur  $u^{-1}$  étant exact, on en déduit que  $\widetilde{\mathcal{M}} \rightarrow \widetilde{\mathcal{M}'}$  est un monomorphisme. Par ailleurs, il existe en vertu du lemme (A.1.1.5) un morphisme  $\widetilde{f} : \widetilde{\mathcal{M}} \rightarrow \mathcal{F}$  qui induit  $f$  par restriction au site étale. Comme  $\mathcal{F}$  est injectif,  $\widetilde{f}$  se prolonge à  $\widetilde{\mathcal{M}'}$  et la restriction au site étale de  $\mathcal{X}$  de ce prolongement fournit un prolongement de  $f$  à  $\mathcal{M}'$ , ce qui achève la démonstration.  $\square$

**Proposition A.1.1.9** Soient  $\mathcal{X}$  un  $S$ -champ de Deligne-Mumford et  $\mathcal{F} \in \text{Ab}(\mathcal{X})$  un faisceau lisse-étale abélien sur  $\mathcal{X}$ . On note  $\mathcal{F}_{\text{ét}}$  la restriction de  $\mathcal{F}$  au site étale de  $\mathcal{X}$ . Alors pour tout  $q \geq 0$  on a un isomorphisme canonique :

$$H_{\text{lis-ét}}^q(\mathcal{X}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} H_{\text{ét}}^q(\mathcal{X}, \mathcal{F}_{\text{ét}}).$$

**Démonstration.** C'est évident compte tenu des deux résultats précédents.  $\square$

### A.1.2 Fonctorialité du topos lisse-étale

Soit  $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  un 1-morphisme de  $S$ -champs algébriques. On rappelle (cf. [38], (12.5)) que l'on peut lui associer un couple de foncteurs adjoints  $(f^{-1}, f_*)$  de la manière suivante. Pour tout faisceau lisse-étale  $\mathcal{F}$  sur  $\mathcal{X}$  et tout ouvert lisse-étale  $(V, v)$  de  $\mathcal{Y}$ , on pose

$$(f_*\mathcal{F})(V, v) = \varprojlim \mathcal{F}(U, u)$$

où la limite projective est prise sur les carrés 2-commutatifs de  $S$ -champs algébriques

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{g} & V \\ u \downarrow & & \downarrow v \\ \mathcal{X} & \xrightarrow{f} & \mathcal{Y} \end{array}$$

avec  $(U, u) \in \text{ob Lis-ét}(\mathcal{X})$ . Les flèches de restriction sont définies de manière évidente. Le foncteur image directe est décrit de manière légèrement différente dans [38], mais il est très facile de vérifier qu'il s'agit bien là du même foncteur. Ainsi défini, il est évident qu'il commute aux limites projectives arbitraires, de sorte que l'on sait *a priori* qu'il admet un adjoint à gauche, déterminé de manière unique à unique isomorphisme près. Nous noterons  $f^{-1}$  cet adjoint à gauche. On peut en donner une description simple. Pour tout faisceau lisse-étale  $\mathcal{G}$  sur  $\mathcal{Y}$ , on définit d'abord un préfaisceau  $\widehat{f^{-1}\mathcal{G}}$  sur  $\text{Lis-ét}(\mathcal{X})$  en posant pour tout ouvert lisse-étale  $(U, u)$  de  $\mathcal{X}$ ,

$$(\widehat{f^{-1}\mathcal{G}})(U, u) = \varinjlim \mathcal{G}(V, v)$$

où la limite inductive est prise sur les carrés 2-commutatifs de  $S$ -champs algébriques

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{g} & V \\ u \downarrow & & \downarrow v \\ \mathcal{X} & \xrightarrow{f} & \mathcal{Y} \end{array}$$

avec  $(V, v) \in \text{ob Lis-ét}(\mathcal{Y})$ . Les flèches de restriction du préfaisceau  $\widehat{f^{-1}\mathcal{G}}$  sont définies de manière évidente. On définit alors  $f^{-1}\mathcal{G}$  comme étant le faisceau lisse-étale associé au préfaisceau  $\widehat{f^{-1}\mathcal{G}}$ . Il est clair que ces foncteurs induisent un couple de foncteurs adjoints entre les catégories des faisceaux abéliens sur  $\mathcal{X}$  et sur  $\mathcal{Y}$ . Rappelons aussi que ces foncteurs s'expriment plus simplement dans les cas particuliers suivants ([38] (12.5.1) et (12.5.2)). Si  $f$  est lisse, alors pour tout faisceau lisse-étale  $\mathcal{G}$  sur  $\mathcal{Y}$  le faisceau lisse-étale  $f^{-1}\mathcal{G}$  n'est autre que la restriction de  $\mathcal{G}$  au site lisse-étale de  $\mathcal{X}$  par le foncteur  $(U, u) \mapsto (U, f \circ u)$ . Si  $f$  est représentable, le foncteur image directe est induit par une application continue  $\text{Lis-ét}(\mathcal{X}) \rightarrow \text{Lis-ét}(\mathcal{Y})$ . Pour tout faisceau lisse-étale  $\mathcal{F}$  sur  $\mathcal{X}$  le faisceau lisse-étale  $f_*\mathcal{F}$  est donné par  $f_*\mathcal{F}(V, v) = \mathcal{F}(\mathcal{X} \times_{\mathcal{Y}} V, \text{pr}_{\mathcal{X}})$ .

**Remarque A.1.2.1** Comme on pourra le lire bientôt dans la prochaine édition de [38], ou dès aujourd'hui dans [44], il serait erroné de penser que le couple  $(f^{-1}, f_*)$  est toujours un morphisme de topos. Il peut en effet arriver que le foncteur  $f^{-1}$  ne soit pas exact, même lorsque  $\mathcal{X}$  et  $\mathcal{Y}$  sont des schémas. Pour s'en convaincre on consultera les références citées. C'est toutefois le cas dès que  $f$  est lisse.

Le foncteur  $f_* : \text{Ab}(\mathcal{X}) \rightarrow \text{Ab}(\mathcal{Y})$ , qui a un adjoint à gauche, commute aux limites projectives et en particulier est exact à gauche. On peut donc définir les foncteurs dérivés  $R^q f_* : \text{Ab}(\mathcal{X}) \rightarrow \text{Ab}(\mathcal{Y})$ . Nous les étudierons plus en détail ultérieurement : nous ne disposons pas à l'heure actuelle de tous les outils techniques nécessaires.

### A.1.3 Le site lisse-lisse champêtre d'un champ algébrique

Pour un certain nombre de considérations techniques, le site lisse-étale défini ci-dessus ne contient pas suffisamment d'ouverts pour être vraiment commode. En effet, lorsque  $f$  n'est pas représentable, le foncteur  $f_*$  n'est pas induit par une application continue  $\text{Lis-ét}(\mathcal{X}) \rightarrow \text{Lis-ét}(\mathcal{Y})$ , ce qui pose problème par exemple lorsque l'on essaye de calculer les foncteurs images directes supérieures  $R^q f_*$  (voir le paragraphe (A.1.6)). C'est la raison pour laquelle nous introduisons un site un peu plus gros, qui ne présentera plus les mêmes inconvénients. Nous démontrons ensuite (A.1.3.3) que le topos qu'il définit est équivalent au topos lisse-étale. Le choix de la topologie lisse plutôt qu'étale pour ce site est essentiellement dû au fait que pour la topologie étale, les « ouverts lisses champêtres » ne sont pas toujours recouverts par un espace algébrique.

Soit  $\mathcal{X}$  un  $S$ -champ algébrique. On définit la 2-catégorie des ouverts lisses champêtres de la manière suivante. Les objets sont les couples  $(\mathcal{U}, u)$  où  $\mathcal{U}$  est un  $S$ -champ algébrique et  $u : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{X}$  est un morphisme représentable et lisse. Un 1-morphisme entre deux tels ouverts  $(\mathcal{U}, u)$  et  $(\mathcal{V}, v)$  est un couple  $(\varphi, \alpha)$  où  $\varphi : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$  est un 1-morphisme (automatiquement représentable!) de  $S$ -champs algébriques et  $\alpha : u \Rightarrow v \circ \varphi$  est un 2-isomorphisme.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{U} & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{V} \\ u \searrow & \alpha \nearrow & \swarrow v \\ & \mathcal{X} & \end{array}$$

Si  $(\varphi, \alpha)$  et  $(\psi, \beta)$  sont deux 1-morphismes de  $(\mathcal{U}, u)$  dans  $(\mathcal{V}, v)$ , un 2-morphisme entre  $(\varphi, \alpha)$  et  $(\psi, \beta)$  est un 2-isomorphisme  $\gamma : \varphi \Rightarrow \psi$  tel que  $\beta = (v_*\gamma) \circ \alpha$ .

**Lemme A.1.3.1** *Soient  $(\mathcal{U}, u)$  et  $(\mathcal{V}, v)$  deux ouverts lisses champêtres. Alors la catégorie des morphismes de  $(\mathcal{U}, u)$  dans  $(\mathcal{V}, v)$  est équivalente à une catégorie discrète.*

**Démonstration.** Il suffit de montrer que si  $(\varphi, \alpha)$  est un objet de  $\text{Hom}((\mathcal{U}, u), (\mathcal{V}, v))$ , alors le groupe des automorphismes de  $(\varphi, \alpha)$  est réduit à l'identité. Soit  $\gamma \in \text{Aut}(\varphi, \alpha)$ . Alors  $\gamma$  est un 2-automorphisme de  $\varphi$  qui induit l'identité de  $v \circ \varphi$ . Or d'après [38] (8.1.2), (2.2) et (2.3), un 1-morphisme de  $S$ -champs algébriques  $v : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{X}$  est représentable si et seulement si pour tout  $U \in \text{ob}(\text{Aff}/S)$ , le foncteur  $v_U : \mathcal{V}_U \rightarrow \mathcal{X}_U$  est fidèle. En particulier le morphisme  $\text{Aut}(\varphi) \rightarrow \text{Aut}(v \circ \varphi)$  est injectif, donc  $\gamma$  est l'identité de  $\varphi$ .  $\square$

À l'avenir on identifiera  $\text{Hom}((\mathcal{U}, u), (\mathcal{V}, v))$  à une catégorie discrète équivalente et on parlera de l'ensemble des morphismes de  $(\mathcal{U}, u)$  dans  $(\mathcal{V}, v)$ , et de la catégorie des ouverts lisses champêtres. Il est clair que cette catégorie admet des produits fibrés.

**Définition A.1.3.2** *On appelle site lisse-lisse champêtre, et on note  $\text{Llc}(\mathcal{X})$ , la catégorie des ouverts lisses champêtres de  $\mathcal{X}$  munie de la topologie engendrée par la prétopologie pour laquelle les familles couvrantes sont les familles de morphismes*

$$((\mathcal{U}_i, u_i) \longrightarrow (\mathcal{U}, u))_{i \in I}$$

telles que le morphisme (automatiquement représentable)

$$\coprod_{i \in I} u_i : \coprod_{i \in I} \mathcal{U}_i \longrightarrow \mathcal{U}$$

soit lisse et surjectif.

**Proposition A.1.3.3** 1) *La topologie de  $\text{Lis-ét}(\mathcal{X})$  est égale à la topologie engendrée par la prétopologie dite lisse, pour laquelle les familles couvrantes sont les familles de morphismes  $((U_i, u_i) \rightarrow (U, u))_{i \in I}$  telles que le morphisme  $\coprod_{i \in I} u_i : \coprod_{i \in I} U_i \rightarrow U$  soit lisse et surjectif.*

2) *Le foncteur d'inclusion  $\text{Lis-ét}(\mathcal{X}) \hookrightarrow \text{Llc}(\mathcal{X})$  induit une équivalence de topos de la catégorie des faisceaux sur le site lisse-lisse champêtre vers la catégorie des faisceaux sur  $\text{Lis-ét}(\mathcal{X})$ .*

**Démonstration.** 1) Si  $V \rightarrow U$  est un morphisme lisse et surjectif de  $S$ -espaces algébriques, il existe un  $S$ -espace algébrique  $U'$  et un morphisme  $U' \rightarrow U$  étale surjectif qui se factorise par  $V$ . On en déduit facilement que toute famille couvrante de la prétopologie lisse admet un raffinement qui est une famille couvrante de la prétopologie étale. En particulier, si  $R$  est le crible engendré par une famille couvrante de la prétopologie lisse, il contient un crible engendré par une famille couvrante de la prétopologie étale. D'après la proposition II (1.4) de [3], si  $T$  est la topologie engendrée par une prétopologie  $E$ , et si  $(U, u)$  est un ouvert, pour qu'un crible  $R$  de  $(U, u)$  soit un crible couvrant de  $(U, u)$  pour  $T$ , il faut et il suffit qu'il contienne un crible  $R'$  engendré par une famille couvrante de la prétopologie  $E$ . Notre assertion en résulte immédiatement.

2) Compte tenu de 1) il est clair que la topologie de  $\text{Lis-ét}(\mathcal{X})$  est bien la topologie induite par celle de  $\text{Llc}(\mathcal{X})$  via le foncteur d'inclusion  $\text{Lis-ét}(\mathcal{X}) \hookrightarrow \text{Llc}(\mathcal{X})$ . Il suffit alors d'appliquer le lemme de comparaison [3] III (4.1).  $\square$



**Remarque A.1.3.4** Notons  $\mathcal{X}_{\text{Llc}}$  le topos des faisceaux sur  $\text{Llc}(\mathcal{X})$ . Si  $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  est un 1-morphisme de  $S$ -champs algébriques, il induit un couple de foncteurs adjoints  $(f_{\text{Llc}}^{-1}, f_{\text{Llc}*}^{\text{llc}})$  définis de manière évidente. En particulier le foncteur  $f_{\text{Llc}*}^{\text{llc}}$  est simplement donné par  $(f_{\text{Llc}*}^{\text{llc}} \mathcal{F})(\mathcal{U}, u) = \mathcal{F}(\mathcal{X} \times_{\mathcal{Y}} \mathcal{U}, \text{pr}_{\mathcal{X}})$  pour tout ouvert lisse champêtre  $u : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{Y}$  de  $\mathcal{Y}$ . On peut aussi définir un foncteur « sections globales » en posant simplement  $\Gamma_{\text{Llc}}(\mathcal{X}, \mathcal{F}) = \mathcal{F}(\mathcal{X}, \text{Id}_{\mathcal{X}})$ . Il est alors clair que ces foncteurs coïncident avec leurs analogues sur les faisceaux lisses-étales via l'équivalence de catégories ci-dessus. Nous supprimerons à l'avenir la mention « llc » dans les notations qui désignent ces foncteurs.

**Remarque A.1.3.5** Si  $u : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{X}$  est un morphisme représentable et lisse de  $S$ -champs algébriques, et si  $\mathcal{A}$  est un anneau du topos  $\mathcal{X}_{\text{Llc}}$ , le foncteur

$$u^* : \begin{cases} \text{Mod}_{\mathcal{A}}(\mathcal{X}) \longrightarrow \text{Mod}_{\mathcal{A}(\mathcal{U}, u)}(\mathcal{U}) \\ \mathcal{F} \longmapsto \mathcal{F}_{(\mathcal{U}, u)} \end{cases}$$

où  $\mathcal{F}_{(\mathcal{U}, u)}$  (resp.  $\mathcal{A}_{(\mathcal{U}, u)}$ ) désigne la restriction de  $\mathcal{F}$  (resp.  $\mathcal{A}$ ) au site lisse-lisse champêtre de  $\mathcal{U}$ , commute aux limites projectives et inductives arbitraires. Il a donc un adjoint à gauche  $u_!$ , et de plus cet adjoint est exact (tout ceci résulte de [3] IV (11.3.1)). Par suite  $u^*$  transforme les objets injectifs en objets injectifs (voir aussi [4] V (2.2)).

#### A.1.4 La suite spectrale relative à un recouvrement

Soit  $P : \mathcal{U}^0 \rightarrow \mathcal{X}$  un morphisme représentable, lisse et surjectif de  $S$ -champs algébriques. On note

$$\begin{aligned} \mathcal{U}^1 &= \mathcal{U}^0 \times_{\mathcal{X}} \mathcal{U}^0 \\ \mathcal{U}^2 &= \mathcal{U}^0 \times_{\mathcal{X}} \mathcal{U}^0 \times_{\mathcal{X}} \mathcal{U}^0 \\ &\vdots \\ \mathcal{U}^n &= \mathcal{U}^0 \times_{\mathcal{X}} \cdots \times_{\mathcal{X}} \mathcal{U}^0 \quad (n+1 \text{ fois}) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Les  $\mathcal{U}^n$  forment avec les diagonales partielles et les projections un  $S$ -champ algébrique simplicial muni d'une augmentation vers  $\mathcal{X}$  :

$$\cdots \quad \mathcal{U}^n \quad \cdots \quad \mathcal{U}^2 \begin{matrix} \xrightarrow{\quad} \\ \xleftarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \end{matrix} \mathcal{U}^1 \begin{matrix} \xrightarrow{\quad} \\ \xleftarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \end{matrix} \mathcal{U}^0 \longrightarrow \mathcal{X}$$

Soit  $\mathcal{F}$  un faisceau abélien sur le site lisse-étale de  $\mathcal{X}$ . On note  $\mathcal{F}^i$  la restriction de  $\mathcal{F}$  au site lisse-étale de  $\mathcal{U}^i$ . On cherche alors à calculer la cohomologie de  $\mathcal{F}$  en fonction de la cohomologie des  $\mathcal{F}^i$  sur les  $\mathcal{U}^i$ . On peut associer au champ algébrique simplicial ci-dessus un complexe de Čech de la manière suivante. Pour  $n \geq 2$ , on note  $p_{1\ldots\hat{l}\ldots n}$ , où la notation  $\hat{l}$  signifie que l'indice  $l$  est omis, la projection  $\mathcal{U}^{n-1} \rightarrow \mathcal{U}^{n-2}$  qui « oublie » le facteur d'indice  $l$  de  $\mathcal{U}^{n-1}$ . Par exemple  $p_1$  et  $p_2$  désignent respectivement les première et seconde projections de  $\mathcal{U}^0 \times_{\mathcal{X}} \mathcal{U}^0$  sur  $\mathcal{U}^0$ . On définit alors le complexe de Čech  $S(H^q)$  comme étant le complexe :

$$H^q(\mathcal{U}^0, \mathcal{F}^0) \xrightarrow{d^0} H^q(\mathcal{U}^1, \mathcal{F}^1) \xrightarrow{d^1} \cdots \longrightarrow H^q(\mathcal{U}^p, \mathcal{F}^p) \xrightarrow{d^p} \cdots$$

avec

$$\begin{aligned} d^0 &= p_2^* - p_1^* \\ d^1 &= p_{23}^* - p_{13}^* + p_{12}^* \\ &\vdots \\ d^p &= \sum_{l=1}^{p+2} (-1)^{l+1} p_{1\dots\hat{l}\dots(p+2)}^*. \end{aligned}$$

On désigne par  $\check{H}^p(H^q(\mathcal{U}^\bullet, \mathcal{F}^\bullet))$  l'homologie en degré  $p$  de ce complexe :

$$\check{H}^p(H^q(\mathcal{U}^\bullet, \mathcal{F}^\bullet)) = \frac{\text{Ker } d^p}{\text{Im } d^{p-1}}.$$

Le résultat suivant, qui donne la suite spectrale reliant la « cohomologie de Čech » relativement à la famille couvrante  $P : \mathcal{U}^0 \rightarrow \mathcal{X}$ , à la cohomologie lisse-étale de  $\mathcal{F}$  sur  $\mathcal{X}$ , est essentiellement trivial. Il ne fait pas appel aux techniques de descente cohomologique de Deligne présentées par Saint-Donat dans l'exposé V bis de [4] : il s'agit juste de la « suite spectrale de Cartan-Leray relative à un recouvrement ». Il nous rendra cependant de précieux services. Le cas qui nous intéressera le plus en pratique sera celui où  $\mathcal{U}$  est un espace algébrique, de sorte que  $P$  est une présentation de  $\mathcal{X}$ .

**Proposition A.1.4.1 ([4] V (3.3))** *Reprenons les hypothèses et notations précédentes. Il existe une suite spectrale (fonctorielle) :*

$$E_2^{p,q} = \check{H}^p(H^q(\mathcal{U}^\bullet, \mathcal{F}^\bullet)) \Rightarrow H^{p+q}(\mathcal{X}, \mathcal{F}).$$

**Démonstration.** Pour pouvoir appliquer le corollaire V (3.3) de [4], on regarde  $\mathcal{F}$  comme un faisceau sur le site lisse-lisse champêtre de  $\mathcal{X}$ .  $\square$

### A.1.5 Faisceaux acycliques

Soit  $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  un morphisme de  $S$ -champs algébriques. Dans la mesure où le couple de foncteurs adjoints  $(f^{-1}, f_*)$  n'est pas un morphisme de topos, il n'est pas évident *a priori* que le foncteur  $f_*$  transforme les faisceaux injectifs en faisceaux injectifs. C'est essentiellement à ce défaut que le présent paragraphe doit son existence. En effet, pour obtenir la suite spectrale de Leray relative à un morphisme de champs algébriques (cf. paragraphe (A.1.6)), il nous faudra montrer que le foncteur  $f_*$  transforme les faisceaux injectifs en faisceaux acycliques pour le foncteur « sections globales ». L'usage de faisceaux « flasques » en un certain sens va nous permettre de résoudre ce problème, mais il faut bien choisir la classe de faisceaux que l'on considère. En effet, vu que le topos  $\mathcal{X}_{\text{lisse-ét}}$  n'est pas engendré par ses ouverts (la catégorie des ouverts ne contient pas assez de monomorphismes) une définition naïve des faisceaux flasques, comme celle adoptée par Godement ([25]) dans le cas de faisceaux sur un espace topologique, ne convient pas puisque de tels faisceaux ne sont pas nécessairement acycliques (cf. [4] V, exercice 4.16). Par ailleurs, les faisceaux flasques proposés dans SGA 4 ne répondent pas non plus à nos besoins : pour montrer qu'ils sont préservés par le foncteur  $f_*$ , on utilise là-aussi réellement l'exactitude du foncteur  $f^{-1}$  ([4] V 4.9). Rappelons la définition ci-dessous.

**Définition A.1.5.1 ([4] V 4.2)** *Soit  $\mathcal{X}$  un  $S$ -champ algébrique et soit  $\mathcal{F}$  un faisceau lisse-étale abélien. On dit que  $\mathcal{F}$  est Llc-acyclique si pour tout morphisme représentable et lisse  $u : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{X}$  et pour tout  $q > 0$ , le groupe  $H^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}_{(\mathcal{U}, u)})$  est nul.*

**Remarque A.1.5.2** S'il est évident que les faisceaux flasques au sens de SGA 4 sont Llc-acycliques, il n'y a aucune raison *a priori* pour que la réciproque soit vraie. Pour quelques commentaires sur ce genre de questions, on pourra consulter [4] V 4.6 et 4.13. Par ailleurs il est évident que les faisceaux injectifs sont flasques, donc aussi Llc-acycliques.

La proposition suivante, quoique fortement inspirée de la proposition V 4.3 de [4], en diffère légèrement.

**Proposition A.1.5.3** Soient  $\mathcal{X}$  un  $S$ -champ algébrique, et  $\mathcal{F}$  un faisceau sur  $\mathrm{Llc}(\mathcal{X})$ . Les propositions suivantes sont équivalentes :

- (1)  $\mathcal{F}$  est Llc-acyclique ;
- (2) pour toute famille couvrante  $((\mathcal{U}', u') \rightarrow (\mathcal{U}, u))$  dans  $\mathrm{Llc}(\mathcal{X})$ , et pour tout  $q > 0$ , le groupe  $H^q(\mathcal{U}'/\mathcal{U}, \mathcal{F})$  est nul (où  $H^q(\mathcal{U}'/\mathcal{U}, \mathcal{F})$  désigne le  $q^{\text{ième}}$  groupe de cohomologie de Čech de  $\mathcal{F}$ , aussi noté  $\check{H}^q(H^0(\mathcal{U}'^\bullet, \mathcal{F}_{(\mathcal{U}, u)}^\bullet))$  dans la section précédente).

**Démonstration.** L'implication (1)  $\Rightarrow$  (2) résulte de l'implication (i)  $\Rightarrow$  (ii) de [4] V 4.3. Notons qu'il est très facile, si l'on préfère, de la redémontrer directement à partir de la suite spectrale (A.1.4.1). Pour la réciproque, on suppose que la condition (2) est vérifiée, et on va montrer par récurrence sur  $n$  que pour tout  $n > 0$  et pour tout  $(\mathcal{U}, u) \in \mathrm{ob} \mathrm{Llc}(\mathcal{X})$ , le groupe  $H^n(\mathcal{U}, \mathcal{F}_{(\mathcal{U}, u)})$  est nul. Soit  $x \in H^n(\mathcal{U}, \mathcal{F}_{(\mathcal{U}, u)})$ . On sait que pour toute famille couvrante à un élément  $\mathcal{U}' \rightarrow \mathcal{U}$ , on a une suite spectrale

$$E_2^{p,q} = \check{H}^p(H^q(\mathcal{U}'^\bullet, \mathcal{F}_{(\mathcal{U}, u)}^\bullet)) \Rightarrow H^{p+q}(\mathcal{U}, \mathcal{F}_{(\mathcal{U}, u)}).$$

Comme le terme  $E_2^{1,0}$  est nul par hypothèse, la suite exacte des termes de bas degré nous montre que le morphisme  $H^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}_{(\mathcal{U}, u)}) \rightarrow E_2^{0,1}$  est injectif. *A fortiori* le morphisme  $H^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}_{(\mathcal{U}, u)}) \rightarrow H^1(\mathcal{U}', \mathcal{F}_{(\mathcal{U}', u')})$  est lui aussi injectif. Or il existe une famille couvrante  $\mathcal{U}' \rightarrow \mathcal{U}$  telle que  $x|_{\mathcal{U}'}$  soit nul, d'où la nullité de  $x$ . On suppose maintenant la condition vérifiée jusqu'au rang  $n-1$ . Si  $x$  est un élément de  $H^n(\mathcal{U}, \mathcal{F}_{(\mathcal{U}, u)})$ , on choisit une famille couvrante  $\mathcal{U}' \rightarrow \mathcal{U}$  telle que  $x|_{\mathcal{U}'}$  soit nul. Un examen attentif des zéros de la suite spectrale relative à cette famille couvrante nous montre que le morphisme  $H^n(\mathcal{U}, \mathcal{F}_{(\mathcal{U}, u)}) \rightarrow H^n(\mathcal{U}', \mathcal{F}_{(\mathcal{U}', u')})$  est injectif, ce qui prouve que  $x$  est nul.  $\square$

### A.1.6 Images directes supérieures et suite spectrale de Leray relative à un morphisme de champs algébriques

Nous allons à présent essayer de décrire un peu mieux le foncteur  $R^q f_*$ . Pour démontrer la proposition (A.1.6.1) ci-dessous, nous aimerions appliquer directement la proposition V (5.1) de [4]. Telle quelle, elle ne permet malheureusement pas d'obtenir une description satisfaisante des images directes supérieures, pour deux raisons. La première est qu'elle suppose que le couple  $(f^{-1}, f_*)$  est un morphisme de topos, ce qui, comme on l'a vu ci-dessus, n'est pas vrai en général. Cet obstacle est assez inoffensif, puisqu'un examen attentif de la démonstration révèle que cette hypothèse n'est pas essentielle, et que le résultat de *loc. cit.* est valable dans notre cas (voir la démonstration de (A.1.6.1) 1)). Le second obstacle est le manque d'ouverts dans la topologie lisse-étale, résolu par l'usage du site lisse-lisse champêtre.

**Proposition A.1.6.1** 1) Soit  $\mathcal{F}$  un faisceau abélien sur  $\mathrm{Lis}\text{-}\acute{\mathrm{e}}\mathrm{t}(\mathcal{X})$ . Alors le faisceau  $R^q f_* \mathcal{F}$  est le faisceau associé au préfaisceau qui à tout ouvert lisse-étale  $(U, u)$  de

$\mathcal{Y}$  associe  $H^q(\mathcal{X} \times_{\mathcal{Y}} U, \mathcal{F}_{(\mathcal{X} \times_{\mathcal{Y}} U, \text{pr}_{\mathcal{X}})})$ .

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X} \times_{\mathcal{Y}} U & \longrightarrow & U \\ \text{pr}_{\mathcal{X}} \downarrow & \square & \downarrow u \\ \mathcal{X} & \xrightarrow{f} & \mathcal{Y} \end{array}$$

- 2) La restriction de  $(R^q f_*)\mathcal{F}$  au site étale de  $\mathcal{Y}$  est le faisceau étale associé au pré-faisceau qui à tout ouvert étale  $(U, u)$  de  $\mathcal{Y}$  associe  $H^q(\mathcal{X} \times_{\mathcal{Y}} U, \mathcal{F}_{(\mathcal{X} \times_{\mathcal{Y}} U, \text{pr}_{\mathcal{X}})})$ .
- 3) Le faisceau évoqué en 2) est encore la valeur en  $\mathcal{F}$  du  $q^{\text{ième}}$  foncteur dérivé à droite du foncteur qui à un faisceau lisse-étale abélien  $\mathcal{F}$  associe la restriction de  $f_*\mathcal{F}$  au site étale de  $\mathcal{Y}$ .
- 4) Si  $\mathcal{Y} = \text{Spec } A$  est un schéma affine et si  $\mathcal{X}$  est quasi-compact, alors pour tout faisceau quasi-cohérent  $\mathcal{F}$  sur  $\mathcal{X}$  :

$$H^0(\text{Spec } A, R^q f_*\mathcal{F}) \simeq H^q(\mathcal{X}, \mathcal{F}).$$

**Démonstration.** 1) Vu la remarque (A.1.3.4), on peut remplacer le site lisse-étale par le site lisse-lisse champêtre. Nous reprenons ici les arguments de [4] V (5.1). Notons  $\hat{f}_*$  le foncteur image directe de la catégorie des préfaisceaux sur  $\text{Llc}(\mathcal{X})$  vers celle des préfaisceaux sur  $\text{Llc}(\mathcal{Y})$ ,  $\underline{a}$  le foncteur « faisceau associé », et  $\mathcal{H}^0$  le foncteur « préfaisceau sous-jacent ». Il est clair que l'on a un isomorphisme de foncteurs :

$$f_* \simeq \underline{a}\hat{f}_*\mathcal{H}^0.$$

Comme les foncteurs  $\underline{a}$  et  $\hat{f}_*$  sont exacts, il en résulte un isomorphisme  $R^q f_* \simeq \underline{a}\hat{f}_*R^q \mathcal{H}^0$ . Il nous reste juste à calculer  $R^q \mathcal{H}^0$ . Soit  $\mathcal{F}$  un faisceau abélien sur  $\text{Llc}(\mathcal{X})$ . Le préfaisceau  $R^q \mathcal{H}^0 \mathcal{F}$  est l'homologie en degré  $q$  (calculée dans la catégorie des préfaisceaux!) du complexe  $0 \rightarrow \mathcal{I}^\bullet$  où  $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{I}^\bullet$  est une résolution injective de  $\mathcal{F}$ . Donc c'est le préfaisceau qui à un gros ouvert lisse  $(\mathcal{U}, u)$  de  $\mathcal{X}$  associe l'homologie en degré  $q$  du complexe :

$$0 \longrightarrow \Gamma(\mathcal{U}, \mathcal{I}_{(\mathcal{U}, u)}^0) \longrightarrow \Gamma(\mathcal{U}, \mathcal{I}_{(\mathcal{U}, u)}^1) \longrightarrow \dots$$

Or les faisceaux  $\mathcal{I}_{(\mathcal{U}, u)}^n$  sont injectifs (remarque (A.1.3.5)), donc ils forment une résolution injective de  $\mathcal{F}_{(\mathcal{U}, u)}$ , d'où il résulte que le  $q^{\text{ième}}$  groupe d'homologie du complexe ci-dessus n'est autre que  $H^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}_{(\mathcal{U}, u)})$ , ce qui prouve notre assertion.

2) résulte immédiatement de 1) et de la remarque (A.1.1.2). Pour 3), il suffit de constater que le foncteur  $(.)_{\text{ét}}$  de restriction des faisceaux au site étale est exact, de sorte que  $R^q((.)_{\text{ét}} \circ f_*) \simeq (.)_{\text{ét}} \circ (R^q f_*)$ .

4) On considère la suite spectrale de Leray relative au morphisme  $f$ . (On n'utilisera pas 4) avant (A.1.6.4).)

$$H^p(\text{Spec } A, R^q f_*\mathcal{F}) \Rightarrow H^{p+q}(\mathcal{X}, \mathcal{F})$$

Or  $R^q f_*\mathcal{F}$  est quasi-cohérent ([38] (13.2.6)), donc pour tout  $p > 0$  et pour tout entier  $q$ ,  $H^p(\text{Spec } A, R^q f_*\mathcal{F}) = 0$ . On en déduit les isomorphismes escomptés ([17], chap. XV, théorème 5.12 p. 328).  $\square$

**Proposition A.1.6.2** *La restriction du foncteur  $R^q f_*$  à la catégorie  $\text{Mod}(\mathcal{X})$  coïncide avec le  $q^{\text{ième}}$  foncteur dérivé à droite de  $f_* : \text{Mod}(\mathcal{X}) \rightarrow \text{Mod}(\mathcal{Y})$ .*

**Démonstration.** Il suffit de montrer que les objets injectifs de  $\text{Mod}(\mathcal{X})$  sont acycliques pour le foncteur  $f_* : \text{Ab}(\mathcal{X}) \rightarrow \text{Ab}(\mathcal{Y})$ . Soit  $\mathcal{I}$  un faisceau de  $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ -modules injectif et soit  $q$  un entier strictement positif. Pour montrer que  $R^q f_* \mathcal{I}$  est nul, il suffit d'après la proposition précédente de montrer que pour tout ouvert lisse-étale  $(U, u)$  de  $\mathcal{Y}$ , le groupe  $H^q(\mathcal{X} \times_{\mathcal{Y}} U, \mathcal{I}_{(\mathcal{X} \times_{\mathcal{Y}} U, \text{pr}_{\mathcal{X}})})$  est nul. Or les groupes de cohomologie du faisceau  $\mathcal{I}_{(\mathcal{X} \times_{\mathcal{Y}} U, \text{pr}_{\mathcal{X}})}$  vu comme faisceau de modules ou comme faisceau abélien coïncident (A.1.1.4), et ce faisceau est un objet injectif de la catégorie  $\text{Mod}(\mathcal{X} \times_{\mathcal{Y}} U)$  (cf. remarque (A.1.3.5)), ce qui prouve que sa cohomologie est nulle.  $\square$

**Lemme A.1.6.3** *Le foncteur  $f_* : \text{Ab}(\mathcal{X}) \rightarrow \text{Ab}(\mathcal{Y})$  préserve les faisceaux Llc-acycliques. En particulier il transforme les faisceaux injectifs en faisceaux acycliques pour le foncteur  $\Gamma(\mathcal{Y}, \cdot)$ .*

**Démonstration.** Soit  $\mathcal{F}$  un faisceau Llc-acyclique sur  $\mathcal{X}$ . Soit  $((\mathcal{U}^0, u^0) \rightarrow (\mathcal{U}, u))$  une famille couvrante à un élément de  $\text{Llc}(\mathcal{Y})$ . On veut montrer que pour tout entier  $p$  strictement positif le groupe  $H^p(\mathcal{U}^0/\mathcal{U}, f_* \mathcal{F})$  est nul. On note  $\mathcal{U}^\bullet$  le champ algébrique simplicial obtenu en prenant le cosquelette du morphisme  $\mathcal{U}^0 \rightarrow \mathcal{U}$ . On note encore  $\mathcal{V}$  (resp.  $\mathcal{V}^0$ ) le produit fibré  $\mathcal{X} \times_{\mathcal{Y}} \mathcal{U}$  (resp.  $\mathcal{X} \times_{\mathcal{Y}} \mathcal{U}^0$ ) et  $\mathcal{V}^\bullet$  le champ algébrique simplicial obtenu en prenant le cosquelette du morphisme  $\mathcal{V}^0 \rightarrow \mathcal{V}$ . Il est canoniquement isomorphe à  $\mathcal{X} \times_{\mathcal{Y}} \mathcal{U}^\bullet$ .

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots & & \mathcal{V}^1 & \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xleftarrow{\quad} \end{array} & \mathcal{V}^0 & \longrightarrow & \mathcal{V} \xrightarrow{v} \mathcal{X} \\
 & & \downarrow f_{\mathcal{U}}^1 & \square & \downarrow f_{\mathcal{U}}^0 & \square & \downarrow f_{\mathcal{U}} \quad \square \quad \downarrow f \\
 \dots & & \mathcal{U}^1 & \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xleftarrow{\quad} \end{array} & \mathcal{U}^0 & \longrightarrow & \mathcal{U} \xrightarrow{u} \mathcal{Y}
 \end{array}$$

Par définition, le groupe  $H^p(\mathcal{U}^0/\mathcal{U}, f_* \mathcal{F})$  est l'homologie en degré  $p$  du complexe

$$0 \longrightarrow H^0(\mathcal{U}^0, (f_* \mathcal{F})^0) \longrightarrow H^0(\mathcal{U}^1, (f_* \mathcal{F})^1) \longrightarrow \dots$$

où  $(f_* \mathcal{F})^i$  désigne la restriction à  $\mathcal{U}^i$  du faisceau  $f_* \mathcal{F}$ . Or pour tout  $i$ , le faisceau  $(f_* \mathcal{F})^i$  est exactement le faisceau  $f_{\mathcal{U}^i}^i(\mathcal{F}^i)$ , où  $\mathcal{F}^i$  est la restriction à  $\mathcal{V}^i$  de  $\mathcal{F}$ . On en déduit que le complexe ci-dessus n'est autre que

$$0 \longrightarrow H^0(\mathcal{V}^0, \mathcal{F}^0) \longrightarrow H^0(\mathcal{V}^1, \mathcal{F}^1) \longrightarrow \dots$$

d'où un isomorphisme

$$H^p(\mathcal{U}^0/\mathcal{U}, f_* \mathcal{F}) \simeq H^p(\mathcal{V}^0/\mathcal{V}, \mathcal{F}).$$

L'assertion est maintenant claire puisque  $\mathcal{V}^0 \rightarrow \mathcal{V}$  est une famille couvrante de  $\text{Llc}(\mathcal{X})$ .  $\square$

**Théorème A.1.6.4 (suite spectrale de Leray relative à  $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ )** *Soit*

$$f : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$$

*un morphisme de  $S$ -champs algébriques, et soit  $\mathcal{F}$  un faisceau lisse-étale abélien sur  $\mathcal{X}$ . Il existe une suite spectrale :*

$$H^p(\mathcal{Y}, R^q f_* \mathcal{F}) \Rightarrow H^{p+q}(\mathcal{X}, \mathcal{F}).$$

**Démonstration.** Compte tenu du lemme précédent, c'est juste la suite spectrale d'un foncteur composé (cf. [36] XX, théorème (9.6)). Le fait que le foncteur  $\Gamma(\mathcal{X}, \cdot)$  soit bien le foncteur composé  $\Gamma(\mathcal{Y}, \cdot) \circ f_*$  est évident lorsqu'on regarde  $\mathcal{F}$  comme un faisceau sur le site lisse-lisse champêtre de  $\mathcal{X}$ .  $\square$

**Proposition A.1.6.5** *Soient  $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  et  $g : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Z}$  des morphismes de  $S$ -champs algébriques et soit  $\mathcal{F}$  un faisceau lisse-étale abélien sur  $\mathcal{X}$ . Alors on a une suite spectrale :*

$$R^p g_* R^q f_* \mathcal{F} \Rightarrow R^{p+q} (g \circ f)_* \mathcal{F}.$$

**Démonstration.** C'est encore une fois la suite spectrale d'un foncteur composé. Il faut juste montrer que si  $\mathcal{I}$  est un faisceau injectif sur  $\mathcal{X}$ , alors  $f_* \mathcal{I}$  est acyclique pour le foncteur  $g_*$ , autrement dit que le faisceau  $R^q g_*(f_* \mathcal{I})$  est nul pour tout  $q > 0$ . C'est évident en utilisant la proposition (A.1.6.1), le lemme (A.1.6.3) et la remarque (A.1.3.5).  $\square$

### A.1.7 Cohomologie et changement de base

Nous aurons besoin par la suite d'hyperrecouvrements. La définition que, pour la commodité du lecteur, nous rappelons ci-dessous, est plus simple en apparence que celle présentée dans [4]. Elle lui est équivalente dès que la catégorie sous-jacente à  $C$  admet des sommes directes arbitraires (en effet les objets semi-représentables sont alors représentables), ce que nous supposons dès à présent.

**Définition A.1.7.1** (cf. [4] V (7.3.1.2)) *Soient  $C$  un site (admettant des sommes directes arbitraires),  $X$  un objet de  $C$  et  $U^\bullet \rightarrow X$  un objet simplicial de  $C$  muni d'une augmentation vers  $X$ , ou de manière équivalente un objet simplicial de  $C/X$ . On dit que  $U^\bullet$  est un hyperrecouvrement de  $X$  s'il possède les propriétés suivantes :*

(1) *Pour tout entier  $n \geq 0$  le morphisme canonique*

$$U^{n+1} \longrightarrow (\cosq_n(\sq_n U^\bullet))_{n+1}$$

*est un morphisme couvrant.*

(2) *Le morphisme  $U^0 \rightarrow X$  est couvrant.*

**Remarque A.1.7.2** Dans la définition précédente,  $\sq_n$  désigne le foncteur qui à un objet simplicial associe son tronqué à l'ordre  $n$ . Le foncteur  $\cosq_n$  est l'adjoint à droite de  $\sq_n$ . Enfin  $(\cosq_n(\sq_n U^\bullet))_{n+1}$  désigne le terme d'indice  $n+1$  de l'objet simplicial  $\cosq_n(\sq_n U^\bullet)$ .

Si  $U^\bullet \rightarrow X$  est un hyperrecouvrement de  $X$  et si  $\mathcal{F}$  est un faisceau abélien sur  $X$ , on lui associe un complexe

$$0 \longrightarrow H^q(U^0, \mathcal{F}^0) \longrightarrow H^q(U^1, \mathcal{F}^1) \longrightarrow \dots$$

de manière tout à fait analogue à ce qui a été fait dans la section (A.1.4) (où  $\mathcal{F}^i$  désigne la restriction de  $\mathcal{F}$  à  $U^i$ ). On note encore  $\check{H}^p(H^q(U^\bullet, \mathcal{F}^\bullet))$  l'homologie en degré  $p$  de ce complexe. On a alors une suite spectrale ([4] V (7.4.0.3)) :

$$\check{H}^p(H^q(U^\bullet, \mathcal{F}^\bullet)) \Rightarrow H^{p+q}(X, \mathcal{F}).$$

**Proposition A.1.7.3** Soit  $\mathcal{X}$  un  $S$ -champ algébrique quasi-compact, avec  $S = \operatorname{Spec} A$  affine, et soit  $\mathcal{F}$  un faisceau quasi-cohérent sur  $\mathcal{X}$ . Soient  $A'$  une  $A$ -algèbre plate,  $S' = \operatorname{Spec} A'$ , et  $\mathcal{X}' = \mathcal{X} \times_S S'$ . On note  $\mathcal{F}'$  l'image inverse de  $\mathcal{F}$  sur  $\mathcal{X}'$ . Alors pour tout  $q \geq 0$  le morphisme naturel

$$H^q(\mathcal{X}, \mathcal{F}) \otimes_A A' \longrightarrow H^q(\mathcal{X}', \mathcal{F}')$$

est un isomorphisme.

**Démonstration.** C'est évident lorsque  $\mathcal{X}$  est un schéma affine et  $q = 0$ . Dans le cas général, soit  $U^0 \rightarrow \mathcal{X}$  une présentation de  $\mathcal{X}$ , telle que  $U^0$  soit un schéma affine. On pose  $V^1 = U^0 \times_{\mathcal{X}} U^0$ . Soit  $W^1 \rightarrow V^1$  une présentation de l'espace algébrique  $V^1$  dont la source  $W^1$  est un schéma affine. On obtient alors un hyperrecouvrement tronqué à l'ordre 1 en posant  $U^1 = U^0 \amalg W^1$ .

$$U^1 \begin{array}{c} \rightrightarrows \\ \leftarrow \\ \rightarrow \end{array} U^0 \longrightarrow \mathcal{X}$$

On note  $U^\bullet$  le 1-cosquelette de ce diagramme. C'est clairement un hyperrecouvrement<sup>4</sup> de  $\mathcal{X}$ . De plus, on peut voir facilement dans la construction du cosquelette (cf. [21] (0.8)) que pour tout  $n \geq 0$  le champ algébrique  $U^{n+2}$  s'exprime en termes de produits fibrés obtenus à partir du diagramme :

$$U^{n+1} \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \vdots \\ \xrightarrow{\quad} \end{array} U^n.$$

On en déduit que pour tout  $n \geq 0$ ,  $U^n$  est un schéma affine. D'après [4] V (7.4.0.3) on a une suite spectrale :

$$E_2^{p,q} = \check{H}^p(H^q(U^\bullet, \mathcal{F}^\bullet)) \Rightarrow H^{p+q}(X, \mathcal{F}).$$

Comme  $\mathcal{F}$  est quasi-cohérent, on a  $H^q(U^i, \mathcal{F}^i) = 0$  pour tout  $q > 0$  et pour tout  $i$ , donc  $E_2^{p,q} = 0$  pour tout  $q > 0$ . On en déduit pour tout  $p$  un isomorphisme :

$$\check{H}^p(H^0(U^\bullet, \mathcal{F}^\bullet)) \xrightarrow{\sim} H^p(\mathcal{X}, \mathcal{F}).$$

Par ailleurs l'objet simplicial  $U^\bullet \times_S S'$  obtenu par changement de base est un hyperrecouvrement de  $\mathcal{X}'$ , et les objets qui le composent sont des schémas affines. Donc on a aussi un isomorphisme :

$$\check{H}^p(H^0(U^\bullet \times_S S', \mathcal{F}'^\bullet)) \xrightarrow{\sim} H^p(\mathcal{X}', \mathcal{F}').$$

Vu que  $A'$  est plat sur  $A$ , l'opération qui consiste à prendre l'homologie en degré  $p$  d'un complexe de  $A$ -modules donné commute avec l'extension des scalaires à  $A'$ . On en déduit que dans le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \check{H}^p(H^0(U^\bullet, \mathcal{F}^\bullet)) \otimes_A A' & \xrightarrow{\sim} & H^p(\mathcal{X}, \mathcal{F}) \otimes_A A' \\ \downarrow & & \downarrow \\ \check{H}^p(H^0(U^\bullet \times_S S', \mathcal{F}'^\bullet)) & \xrightarrow{\sim} & H^p(\mathcal{X}', \mathcal{F}') \end{array}$$

la flèche verticale de gauche est un isomorphisme, donc celle de droite aussi.  $\square$

4. C'est même un hyperrecouvrement de type 1 au sens de [4] V (7.3.1.1).

**Proposition A.1.7.4** *Soit  $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  un morphisme quasi-compact de  $S$ -champs algébriques, et soit  $\mathcal{F}$  un faisceau quasi-cohérent sur  $\mathcal{X}$ . Soit  $u : \mathcal{Y}' \rightarrow \mathcal{Y}$  un morphisme plat de changement de base.*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X}' & \xrightarrow{v} & \mathcal{X} \\ g \downarrow & \square & \downarrow f \\ \mathcal{Y}' & \xrightarrow{u} & \mathcal{Y} \end{array}$$

Alors pour tout  $q \geq 0$  le morphisme naturel

$$u^* R^q f_* \mathcal{F} \longrightarrow (R^q g_*)(v^* \mathcal{F})$$

est un isomorphisme.

**Démonstration.** Le cas où  $u$  est lisse découle formellement de la proposition (A.1.6.1). On se ramène alors facilement au cas où  $\mathcal{Y}$  et  $\mathcal{Y}'$  sont des schémas affines. On les note respectivement  $S = \operatorname{Spec} A$  et  $S' = \operatorname{Spec} A'$ . Par [38] (13.2.6), le faisceau  $R^q f_* \mathcal{F}$  est quasi-cohérent. De plus on a des équivalences de catégories :

$$(A\text{-Mod}) \simeq \operatorname{Mod}_{\operatorname{qcoh}}(\mathcal{O}_{S_{\operatorname{Zar}}}) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Mod}_{\operatorname{qcoh}}(\mathcal{O}_{S_{\operatorname{lisse-ét}}})$$

$$(A'\text{-Mod}) \simeq \operatorname{Mod}_{\operatorname{qcoh}}(\mathcal{O}_{S'_{\operatorname{Zar}}}) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Mod}_{\operatorname{qcoh}}(\mathcal{O}_{S'_{\operatorname{lisse-ét}}})$$

induites par les équivalences de [38] (13.2.3) et (13.1.2). Via ces équivalences de catégories, le morphisme naturel

$$u^* R^q f_* \mathcal{F} \longrightarrow (R^q g_*)(v^* \mathcal{F})$$

correspond au morphisme

$$H^0(S, R^q f_* \mathcal{F}) \otimes_A A' \longrightarrow H^0(S', R^q g_*(v^* \mathcal{F})).$$

Il suffit alors d'appliquer (A.1.6.1) 4) et (A.1.7.3).  $\square$

### A.1.8 Cohomologie et extensions infinitésimales

**Lemme A.1.8.1** *Soit  $i : \mathcal{X} \rightarrow \widetilde{\mathcal{X}}$  une immersion fermée de champs algébriques définie par un idéal quasi-cohérent de  $\widetilde{\mathcal{X}}$  de carré nul, et soit  $\mathcal{F}$  un faisceau abélien sur  $\mathcal{X}$ . Alors pour tout  $q > 0$  le faisceau  $R^q i_* \mathcal{F}$  est nul. En particulier pour tout  $n$  le morphisme naturel :*

$$H^n(\widetilde{\mathcal{X}}, i_* \mathcal{F}) \longrightarrow H^n(\mathcal{X}, \mathcal{F})$$

est un isomorphisme.

**Démonstration.** La seconde assertion résulte clairement de la première grâce à la suite spectrale de Leray. Pour obtenir la première, en vertu du lemme (A.1.8.2) ci-dessous, et vu la description du faisceau  $R^q i_* \mathcal{F}$  donnée en (A.1.6.1), il suffit de montrer que pour tout ouvert lisse-étale  $(\widetilde{U}, \widetilde{u})$  de  $\widetilde{\mathcal{X}}$  et pour tout  $\xi \in H^q_{\operatorname{lisse-ét}}(U, \mathcal{F}_{(U,u)})$ , où  $(U, u)$  désigne l'ouvert lisse-étale de  $\mathcal{X}$  obtenu par changement de base, il existe un morphisme étale et surjectif  $\widetilde{V} \rightarrow \widetilde{U}$  tel que  $\xi|_{\widetilde{V}}$  soit nul. De plus on peut supposer que  $\widetilde{U}$  est un schéma. Notons  $j : U \rightarrow \widetilde{U}$  l'immersion fermée obtenue par changement de base à partir de  $i$ , et  $j_*$  le foncteur image directe de la catégorie des faisceaux étales abéliens sur  $U$  vers la catégorie des faisceaux étales abéliens sur  $\widetilde{U}$ . Comme  $j$  est définie par un idéal quasi-cohérent de



carré nul, elle induit une équivalence entre les sites étales de  $U$  et de  $\tilde{U}$ , donc les faisceaux  $R^q j_* \mathcal{F}_{U,u}$  sont nuls pour  $q > 0$  (où l'on rappelle que  $\mathcal{F}_{U,u}$  désigne la restriction de  $\mathcal{F}_{(U,u)}$  au site étale de  $U$ ). Or  $R^q j_* \mathcal{F}_{U,u}$  est le faisceau étale associé au préfaisceau sur  $\tilde{U}_{\text{ét}}$  qui à  $(\tilde{V}, \tilde{v})$  associe

$$\begin{aligned} H_{\text{ét}}^q(V, (\mathcal{F}_{U,u})_{V,v}) &= H_{\text{ét}}^q(V, \mathcal{F}_{V,u \circ v}) \\ &= H_{\text{lis-ét}}^q(V, \mathcal{F}_{(V,u \circ v)}) \end{aligned}$$

où les notations sont celles du diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccc} V & \xrightarrow{v} & U & \xrightarrow{u} & \mathcal{X} \\ \downarrow & \square & \downarrow j & \square & \downarrow i \\ \tilde{V} & \xrightarrow{\tilde{v}} & \tilde{U} & \xrightarrow{\tilde{u}} & \tilde{\mathcal{X}}. \end{array}$$

En particulier pour tout  $\xi \in H_{\text{lis-ét}}^q(U, \mathcal{F}_{(U,u)})$ , il existe un morphisme étale et surjectif  $\tilde{V} \rightarrow \tilde{U}$  tel que  $\xi|_{\tilde{V}}$  soit nul, ce qui achève la preuve.  $\square$

**Lemme A.1.8.2** *Soient  $\mathcal{X}$  un  $S$ -champ algébrique,  $F$  un préfaisceau sur  $\text{Lis-ét}(\mathcal{X})$ , et  $\underline{a}F$  le faisceau associé. Alors  $\underline{a}F$  est nul si et seulement si pour tout  $(U, u) \in \text{ob Lis-ét}(\mathcal{X})$  (resp. pour tout  $(U, u) \in \text{ob Lis-ét}(\mathcal{X})$  avec  $U$  un schéma) et pour tout  $\xi \in F(U, u)$  il existe un schéma  $U'$  et un morphisme  $U' \rightarrow U$  étale et surjectif tel que  $\xi|_{U'}$  soit nul.*

**Démonstration.** Cela résulte trivialement de la construction du faisceau associé à un préfaisceau. La restriction au cas où  $U$  est un schéma provient de l'équivalence entre les catégories de faisceaux sur  $\text{Lis-ét}(\mathcal{X})$  et sur  $\underline{\text{Lis-ét}}(\mathcal{X})$  (cf. [38] (12.1.2)).  $\square$

**Corollaire A.1.8.3** *Soit*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X} & \xrightarrow{i} & \tilde{\mathcal{X}} \\ \downarrow f & \square & \downarrow \tilde{f} \\ \mathcal{Y} & \xrightarrow{j} & \tilde{\mathcal{Y}} \end{array}$$

*un carré 2-cartésien de  $S$ -champs algébriques, dans lequel on suppose que  $i$  et  $j$  sont des immersions fermées définies par des idéaux quasi-cohérents de carrés nuls. Soit  $\mathcal{F}$  un faisceau abélien sur  $\mathcal{X}$ . Alors on a pour tout  $p$  un isomorphisme canonique :*

$$R^p \tilde{f}_*(i_* \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} j_* R^p f_* \mathcal{F}.$$

**Démonstration.** On a une suite spectrale :

$$R^p \tilde{f}_*(R^q i_* \mathcal{F}) \Rightarrow R^{p+q}(\tilde{f} \circ i)_* \mathcal{F}.$$

Or pour tout  $q > 0$  le faisceau  $(R^q i_* \mathcal{F})$  est nul, donc on obtient pour tout  $p$  un isomorphisme :

$$R^p \tilde{f}_*(i_* \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} R^p(\tilde{f} \circ i)_* \mathcal{F}.$$

Maintenant le foncteur  $(\tilde{f} \circ i)_*$  est canoniquement isomorphe à  $j_* \circ f_*$ , et  $j_*$  est exact grâce au lemme précédent, donc  $R^p(\tilde{f} \circ i)_* \simeq j_* R^p f_*$ , ce qui achève la preuve.  $\square$

### A.1.9 Un résultat de descente

L'objet de ce paragraphe est de démontrer le théorème suivant, qui n'est autre qu'un résultat de descente pour les champs algébriques.

**Théorème A.1.9.1** *Soit  $\mathcal{F}$  un faisceau sur  $\mathrm{Lc}(\mathcal{X})$  qui, localement pour la topologie lisse sur  $\mathcal{X}$ , est représentable. Alors  $\mathcal{F}$  est représentable par un unique objet  $(\mathcal{P}, p)$  de  $\mathrm{Lc}(\mathcal{X})$ . Autrement dit il existe un morphisme représentable et lisse de  $S$ -champs algébriques  $p : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{X}$  qui représente  $\mathcal{F}$ .*

**Démonstration.** L'hypothèse sur  $\mathcal{F}$  signifie qu'il existe une présentation  $x_0 : X_0 \rightarrow \mathcal{X}$  de  $\mathcal{X}$  telle que la restriction de  $\mathcal{F}$  au site lisse de  $X_0$  soit représentable par un  $X_0$ -espace algébrique lisse  $F_0$ . On note  $X_1$  le produit fibré  $X_0 \times_{\mathcal{X}} X_0$  et  $p_1, p_2$  les projections canoniques de  $X_1$  sur  $X_0$ . L'unicité de  $\mathcal{P}$  est claire en vertu du lemme de Yoneda. Pour l'existence, nous allons construire en premier lieu une collection de faisceaux qui seront les fibres de  $\mathcal{P}$  au-dessus de chaque objet de  $\mathcal{X}$ .

**Lemme A.1.9.2** *Il existe une collection de  $U$ -espaces  $F_{U,u}$  indexée par les couples  $(U, u)$  où  $U \in \mathrm{ob}(\mathrm{Aff}/S)$  et  $u \in \mathrm{ob} \mathcal{X}_U$  et une collection d'isomorphismes de transition*

$$\theta_{\varphi, \alpha} : F_{V,v} \longrightarrow F_{U,u} \times_U V$$

indexée par les diagrammes 2-commutatifs

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\varphi} & U \\ & \searrow \alpha \nearrow & \\ & v \quad u & \\ & \searrow \quad \nearrow & \\ & & \mathcal{X} \end{array}$$

avec les propriétés suivantes :

- (i) les  $\theta_{\varphi, \alpha}$  vérifient une condition de cocycle évidente ;
- (ii) si  $u$  est lisse (i.e. si  $(U, u)$  est un objet du site lisse-étale de  $\mathcal{X}$ ) alors  $F_{U,u}(U)$  est canoniquement isomorphe à  $\mathcal{F}(U, u)$ .

**Démonstration.**

- Cas de  $X_0$  et  $X_1$ .

On pose  $F_{X_0, x_0} = F_0$ ,  $x_1 = x_0 \circ p_1$  et  $F_{X_1, x_1} = F_0 \times_{X_0, p_1} X_1$ .

$$\begin{array}{ccc} F_{X_1, x_1} & \longrightarrow & F_{X_0, x_0} \\ \downarrow & \square & \downarrow \\ X_1 & \xrightarrow{p_1} & X_0 \end{array}$$

On a un diagramme 2-commutatif :

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{p_2} & X_0 \\ & \searrow \gamma \nearrow & \\ & x_1 \quad x_0 & \\ & \searrow \quad \nearrow & \\ & & \mathcal{X} \end{array}$$

Il faut donc construire un 2-isomorphisme de  $F_{X_1, x_1}$  vers  $F_0 \times_{X_0, p_2} X_1$ . Or ces espaces algébriques représentent tous les deux la restriction de  $\mathcal{F}$  au site lisse-étale de  $X_1$  (car  $X_1$

est lisse sur  $\mathcal{X}$ ), l'un par  $x_1$  et l'autre par  $x_0 \circ p_2$ . Le 2-isomorphisme canonique  $\gamma$  de  $x_1$  vers  $x_0 \circ p_2$  induit un isomorphisme de  $x_1^{-1}\mathcal{F}$  vers  $(x_0 \circ p_2)^{-1}\mathcal{F}$ . De plus il est clair que le foncteur naturel de la catégorie des espaces algébriques lisses sur  $X_1$  vers la catégorie des faisceaux lisses-étales sur  $X_1$  est pleinement fidèle. L'isomorphisme évoqué précédemment provient donc d'un unique isomorphisme

$$\theta_{p_2, \gamma} : F_{X_1, x_1} \xrightarrow{\sim} F_0 \times_{X_0, p_2} X_1.$$

- *Cas des objets qui se factorisent par  $X_0$ .*

Soit maintenant  $u : U \rightarrow \mathcal{X}$  tel qu'il existe une factorisation  $(\varphi, \alpha)$  de  $u$  par  $X_0$  :

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\varphi} & X_0 \\ & \searrow \alpha \nearrow & \\ & u \quad x_0 & \\ & \searrow \nearrow & \\ & \mathcal{X} & \end{array}$$

On pose

$$F_{U, u, \varphi, \alpha} = F_{X_0, x_0} \times_{X_0, \varphi} U.$$

Si  $(\varphi_1, \alpha_1)$  et  $(\varphi_2, \alpha_2)$  sont deux factorisations différentes de  $u$  par  $X_0$ , elles induisent une factorisation de  $u$  par  $X_1$  et on en déduit des isomorphismes canoniques entre  $F_{U, u, \varphi_1, \alpha_1}$  et  $F_{X_1, x_1}$  d'une part et entre  $F_{U, u, \varphi_2, \alpha_2}$  et  $F_{X_0, x_0} \times_{X_0, p_2} X_1$  d'autre part. À un isomorphisme canonique près,  $F_{U, u, \varphi, \alpha}$  ne dépend donc pas de la factorisation  $(\varphi, \alpha)$  choisie et nous le noterons  $F_{U, u}$ . C'est un espace algébrique lisse sur  $U$ .

De plus, si  $(U_1, u_1)$  et  $(U_2, u_2)$  se factorisent par  $X_0$ , alors tout diagramme 2-commutatif

$$\begin{array}{ccc} U_1 & \xrightarrow{\varphi} & U_2 \\ & \searrow \alpha \nearrow & \\ & u_1 \quad u_2 & \\ & \searrow \nearrow & \\ & \mathcal{X} & \end{array}$$

induit un isomorphisme canonique

$$\theta_{\varphi, \alpha} : F_{U_1, u_1} \longrightarrow F_{U_2, u_2} \times_{U_2, \varphi} U_1.$$

- *Construction d'un ensemble de sections  $S(U, u)$  pour  $(U, u)$  quelconque.*

Pour tout  $U \in \text{ob}(\text{Aff}/S)$  et tout  $u \in \text{ob} \mathcal{X}_U$  on pose

$$S(U, u) = \varprojlim F_{U', u'}(U')$$

où la limite projective est prise sur les diagrammes 2-commutatifs

$$\begin{array}{ccc} U' & & \\ \varphi \downarrow & \searrow u' & \\ U & \xrightarrow{u} & \mathcal{X} \end{array}$$

dans lesquels  $U'$  est un espace algébrique,  $\varphi$  est lisse et  $u'$  se factorise par  $X_0$ .

À ce stade, nous pouvons faire deux observations importantes pour la suite.

**Observation 1 :** Si  $(U, u)$  lui-même se factorise par  $X_0$ , alors  $S(U, u)$  est canoniquement isomorphe à  $F_{U, u}(U)$ .

**Observation 2 :** Si  $u$  est lisse alors  $S(U, u)$  s'identifie canoniquement à  $\mathcal{F}(U, u)$ . Il est en effet clair que  $S(U, u)$  s'identifie au noyau des deux flèches :

$$F_{U_0, u_0}(U_0) \rightrightarrows F_{U_1, u_1}(U_1)$$

où  $U_0$  désigne le produit fibré  $U \times_{\mathcal{X}} X_0$  et  $U_1$  le produit  $U_0 \times_U U_0$ . Comme  $U_0$  et  $U_1$  sont lisses sur  $X_0$  il résulte des définitions que  $F_{U_0, u_0}(U_0)$  et  $F_{U_1, u_1}(U_1)$  s'identifient respectivement à  $\mathcal{F}(U_0, u_0)$  et  $\mathcal{F}(U_1, u_1)$ , si bien que  $S(U, u)$  est isomorphe au noyau du couple de flèches :

$$\mathcal{F}(U_0, u_0) \rightrightarrows \mathcal{F}(U_1, u_1)$$

qui lui-même est isomorphe à  $\mathcal{F}(U, u)$  puisque la famille  $U_0 \rightarrow U$  est couvrante.

• *Fonctorialité.*

Soient  $U, V \in \text{ob}(\text{Aff}/S)$ ,  $u$  un objet de  $\mathcal{X}_U$  et  $\psi$  un morphisme de  $V$  dans  $U$ . On pose  $v = u \circ \psi$ . On va construire un morphisme de transition

$$S(\psi) : S(U, u) \longrightarrow S(V, v).$$

Soit  $(s_{U', u'})$  un élément de  $S(U, u)$ . On veut lui associer un élément de  $S(V, v)$ . Soit

$$\begin{array}{ccccc} V' & & & & X_0 \\ \varphi \downarrow & \searrow v' & & & \downarrow \\ V & \xrightarrow{\psi} & U & \xrightarrow{u} & \mathcal{X} \end{array}$$

un diagramme 2-commutatif dans lequel  $\varphi$  est lisse et  $v'$  se factorise par  $X_0$ . En notant  $U_0$  le produit fibré de  $U$  par  $X_0$  on voit que se donner une factorisation de  $v'$  par  $X_0$  revient à se donner une factorisation de  $v'$  par  $U_0$ . On choisit un morphisme  $f$  de  $V'$  dans  $U_0$  qui factorise  $v'$ . La section  $s_{U_0, u_0}$  de  $F_{U_0, u_0}(U_0)$  induit alors via  $f$  un élément  $f^* s_{U_0, u_0}$  de  $F_{V', v'}(V')$  que l'on note  $t_{V', v'}$  (on rappelle que  $F_{V', v'} = F_{U_0, u_0} \times_{U_0} V'$ ). Il faut juste vérifier que  $t_{V', v'}$  ne dépend pas de la factorisation  $f$  choisie. C'est évident car si  $f_1$  et  $f_2$  sont deux telles factorisations, alors vu que la famille  $(s_{U', u'})$  est compatible on a nécessairement  $f_1^* s_{U_0, u_0} = (f_1 \times f_2)^* s_{U_1, u_1} = f_2^* s_{U_0, u_0}$  où  $U_1$  est le produit fibré  $U_0 \times_U U_0$ .

Il est clair que les morphismes ainsi construits vérifient  $S(\psi_2 \circ \psi_1) = S(\psi_1) \circ S(\psi_2)$  dès que  $\psi_1$  et  $\psi_2$  sont deux morphismes composables.

• *Construction d'un faisceau  $F_{U, u}$  pour  $(U, u)$  quelconque.*

Soient  $U \in \text{ob}(\text{Aff}/S)$  et  $u \in \text{ob} \mathcal{X}_U$ . On définit un préfaisceau  $F_{U, u}$  sur  $(\text{Aff}/U)$  en posant pour tout objet  $V$  de  $(\text{Aff}/U)$  :

$$F_{U, u}(V) = S(V, v)$$

où  $v$  est le morphisme composé  $V \rightarrow U \rightarrow \mathcal{X}$ . Les morphismes de transition sont donnés par les  $S(\psi)$ . L'observation 1 ci-dessus montre que dans le cas où  $u$  se factorise par  $X_0$ , le préfaisceau que nous venons de définir est canoniquement isomorphe au préfaisceau  $F_{U, u}$  défini précédemment. L'observation 2 permet quant à elle de s'assurer que lorsque  $u$  est lisse l'ensemble  $F_{U, u}(U)$  des sections de  $F_{U, u}$  au-dessus de  $U$  s'identifie canoniquement à l'ensemble  $\mathcal{F}(U, u)$ . Par ailleurs il est évident qu'un diagramme 2-commutatif de la forme

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\varphi} & U \\ & \searrow v & \swarrow u \\ & \mathcal{X} & \end{array} \quad \begin{array}{c} \alpha \\ \nearrow \end{array}$$

induit un isomorphisme canonique  $\theta_{\varphi,\alpha}$  de  $F_{V,v}$  vers  $F_{U,u} \times_U V$  et que ces isomorphismes vérifient une condition de cocycle que seule la crainte de voir le lecteur céder à un agacement bien compréhensible face à ce fleuve de trivialités nous dissuade d'explicitier.

Pour en finir avec la démonstration de notre lemme, il reste juste à montrer que les préfaisceaux  $F_{U,u}$  que nous venons de construire sont des faisceaux pour la topologie étale. Ceci revient à montrer que si  $(U_i \rightarrow U)_i$  est une famille couvrante dans  $(\text{Aff}/S)$  et si  $u$  est un objet de  $\mathcal{X}_U$  alors le diagramme (avec les notations évidentes)

$$S(U, u) \longrightarrow \prod_i S(U_i, u_i) \rightrightarrows \prod_{i,j} S(U_{i,j}, u_{i,j})$$

est exact. On note  $U_0$  (resp.  $U_0^i, U_1, U_1^i, U_0^{i,j}$ ) le produit fibré  $U \times_{\mathcal{X}} X_0$  (resp.  $U_i \times_{\mathcal{X}} X_0, U_0 \times_U U_0, U_1 \times_U U_i, U_0 \times_U U_{i,j}$ ). On sait par ailleurs que  $S(U, u)$  s'identifie au noyau des deux flèches :

$$F_{U_0, u_0}(U_0) \rightrightarrows F_{U_1, u_1}(U_1) .$$

Le résultat découle alors immédiatement du fait que  $F_{U_0, u_0}$  est un faisceau étale et que les familles  $(U_0^i \rightarrow U_0)$  et  $(U_1^i \rightarrow U_1)$  sont couvrantes.  $\square$

Reprenons la démonstration du théorème A.1.9.1.

• *Construction d'un champ  $\mathcal{P}$  candidat.*

On définit pour tout  $U \in \text{ob}(\text{Aff}/S)$  une catégorie  $\mathcal{P}_U$  de la manière suivante. Un objet est un couple  $(x, s)$  où  $x$  est un objet de la catégorie  $\mathcal{X}_U$  et  $s$  est un élément de  $F_{U,x}(U)$ . Un morphisme entre deux tels objets  $(x, s)$  et  $(x', s')$  est un 2-isomorphisme

$$\alpha : x \longrightarrow x'$$

tel que l'isomorphisme  $\theta_{\text{id}_U, \alpha}$  de  $F_{U,x}$  dans  $F_{U,x'}$  envoie  $s$  sur  $s'$ .

Ainsi défini, il est clair que  $\mathcal{P}$  (muni des flèches de transition évidentes) est un  $S$ -espace en groupoïdes. Le fait que  $\mathcal{P}$  soit un  $S$ -champ résulte alors facilement du fait que  $\mathcal{X}$  lui-même en est un et que les foncteurs  $F_{U,x}$  sont des faisceaux étales.

Enfin pour tout  $U \in \text{ob}(\text{Aff}/S)$  on a un foncteur d'oubli évident de  $\mathcal{P}_U$  vers  $\mathcal{X}_U$ . Ces foncteurs induisent un morphisme de  $S$ -champs :

$$p : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{X}$$

.

• *Le  $S$ -champ  $\mathcal{P}$  est algébrique.*

Commençons par remarquer que pour tout  $U \in \text{ob}(\text{Aff}/S)$  et tout objet  $u$  de  $\mathcal{X}_U$  le produit fibré  $\mathcal{P} \times_{\mathcal{X}, u} U$  s'identifie canoniquement au  $U$ -champ associé au  $U$ -espace  $F_{U,u}$ . En d'autres termes on a un carré 2-cartésien

$$\begin{array}{ccc} F_{U,u} & \longrightarrow & U \\ \downarrow & \square & \downarrow u \\ \mathcal{P} & \xrightarrow{p} & \mathcal{X} . \end{array}$$

La vérification de ce fait est aisée, quoique fastidieuse. En particulier en prenant  $U = X_0$  et  $u = x_0$  on obtient un carré 2-cartésien

$$\begin{array}{ccc} F_{X_0, x_0} & \longrightarrow & X_0 \\ \downarrow & \square & \downarrow x_0 \\ \mathcal{P} & \xrightarrow{p} & \mathcal{X} . \end{array}$$

Il résulte alors de [38] (4.3.3) et (4.5) que le morphisme  $p$  est représentable et lisse et que le champ  $\mathcal{P}$  est algébrique. Ceci montre au passage, *a posteriori*, que chacun des  $S$ -espaces  $F_{U,u}$  construits ci-dessus est algébrique et lisse sur  $U$ .

- L'objet  $(\mathcal{P}, p)$  de  $\mathrm{Llc}(\mathcal{X})$  représente le faisceau  $\mathcal{F}$ .

Il faut construire, pour tout objet  $(U, u)$  du site lisse-étale de  $\mathcal{X}$ , un isomorphisme canonique

$$\mathcal{F}(U, u) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Llc}(\mathcal{X})}((U, u), (\mathcal{P}, p)).$$

Un élément du membre de droite est représenté par un triplet  $(x, s, \alpha)$  où  $x$  est un objet de  $\mathcal{X}_U$ ,  $s$  est un élément de  $F_{U,x}(U)$  et  $\alpha$  est un 2-isomorphisme entre  $u$  et  $x$ . Deux triplets  $(x, s, \alpha)$  et  $(x', s', \alpha')$  représentent le même élément s'il existe un 2-isomorphisme  $\beta$  de  $x$  vers  $x'$  tel que  $\theta_{\mathrm{id}_U, \beta}$  envoie  $s$  sur  $s'$  et tel que  $\beta \circ \alpha = \alpha'$ . On construit un morphisme de  $F_{U,u}(U)$  dans cet ensemble en associant à une section  $s$  de  $F_{U,u}(U)$  l'élément représenté par le triplet  $(u, s, \mathrm{id}_U)$ . Il est immédiat qu'il s'agit là d'un isomorphisme, fonctoriel en  $(U, u)$ , si bien qu'en le composant avec l'isomorphisme (ii) du lemme (A.1.9.2) nous obtenons le résultat voulu.  $\square$

### A.1.10 Cohomologie et toseurs

Soit  $\mathcal{X}$  un  $S$ -champ algébrique et soit  $\mathcal{F}$  un faisceau lisse-étale abélien sur  $\mathcal{X}$ . On aimerait calculer le groupe  $H^1(\mathcal{X}, \mathcal{F})$  en termes de toseurs. Bien évidemment, le résultat très général de Giraud ([24] III 3.5.4) s'applique, et l'on sait déjà que le groupe  $H^1(\mathcal{X}, \mathcal{F})$  s'identifie au groupe des classes à isomorphisme près de  $\mathcal{F}$ -torseurs du topos  $\mathrm{Lis}\text{-}\widetilde{\mathrm{ét}}(\mathcal{X})$  des faisceaux sur  $\mathrm{Lis}\text{-}\widetilde{\mathrm{ét}}(\mathcal{X})$ . (Pour la définition d'un toseur d'un topos, nous renvoyons à *loc. cit.* III 1.4.1.) Nous allons dans les lignes qui suivent essayer de remplacer les  $\mathcal{F}$ -torseurs du topos  $\mathrm{Lis}\text{-}\widetilde{\mathrm{ét}}(\mathcal{X})$  par des objets offrant plus de prise à l'intuition géométrique.

On sait (cf. *loc. cit.* III remarque 1.7.2) que si  $E$  est un site standard, c'est-à-dire un site dont la topologie est moins fine que la topologie canonique, et qui admet des produits fibrés finis, alors la catégorie des toseurs du site  $E$  (c'est-à-dire des objets de  $E$  munis d'une action d'un groupe  $G$  de  $E$  vérifiant les conditions que l'on imagine) est équivalente à la sous-catégorie pleine de la catégorie des toseurs du topos  $\widetilde{E}$  formée des toseurs représentables. Il en résulte que si  $G$  est un objet en groupes de  $E$  tel que tout  $G$ -torseur de  $\widetilde{E}$  soit représentable, la catégorie des  $G$ -torseurs de  $E$  est équivalente à la catégorie des  $G$ -torseurs de  $\widetilde{E}$ .

Malheureusement, le site  $\mathrm{Lis}\text{-}\widetilde{\mathrm{ét}}(\mathcal{X})$  n'est pas un site standard : il n'a pas d'objet final, donc pas de produits fibrés finis. On s'en sort encore une fois en utilisant le site lisse-lisse champêtre  $\mathrm{Llc}(\mathcal{X})$ , qui, lui, est bien un site standard, comme le lecteur le vérifiera facilement. Le théorème (A.1.9.1) montre que tout faisceau localement représentable sur  $\mathrm{Llc}(\mathcal{X})$  est représentable. En particulier si  $G$  est un espace algébrique en groupes lisse sur  $S$ , alors tout  $G$ -torseur du topos  $\mathrm{Llc}(\mathcal{X})$  est représentable par un objet du site  $\mathrm{Llc}(\mathcal{X})$ .

La définition suivante ne fait qu'explicitier ce qu'est un  $G$ -torseur de  $\mathrm{Llc}(\mathcal{X})$ , dans le cas où le groupe  $G$  provient de la base  $S$ .

**Définition A.1.10.1** Soient  $S$  un schéma,  $G$  un  $S$ -espace algébrique en groupes lisse sur  $S$  et  $\mathcal{X}$  un  $S$ -champ algébrique. Soit  $p : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{X}$  un 1-morphisme représentable et lisse de  $S$ -champs algébriques. Une action de  $G$  sur  $(\mathcal{P}, p)$  est un quadruplet  $(\mu, \varphi_\mu, \varphi_e, \varphi_{\mathrm{ass}})$ , où  $\mu$  est un 1-morphisme de  $G \times_S \mathcal{P}$  vers  $\mathcal{P}$ , et où  $\varphi_\mu, \varphi_e$  et  $\varphi_{\mathrm{ass}}$  sont des 2-isomorphismes

faisant 2-commuter les diagrammes suivants :

$$\begin{array}{ccc}
 G \times_S \mathcal{P} & \xrightarrow{\mu} & \mathcal{P} \\
 \text{pr}_2 \downarrow & \varphi_\mu \nearrow & \downarrow p \\
 \mathcal{P} & \xrightarrow{p} & \mathcal{X}
 \end{array}$$
  

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{P} & \xrightarrow{e \times \text{Id}_{\mathcal{P}}} & G \times_S \mathcal{P} \\
 \text{Id}_{\mathcal{P}} \searrow & \varphi_e \nearrow & \swarrow \mu \\
 & \mathcal{P} &
 \end{array}$$
  

$$\begin{array}{ccc}
 G \times_S G \times_S \mathcal{P} & \xrightarrow{\text{Id}_G \times \mu} & G \times_S \mathcal{P} \\
 m_G \times \text{Id}_{\mathcal{P}} \downarrow & \varphi_{\text{ass}} \nearrow & \downarrow \mu \\
 G \times_S \mathcal{P} & \xrightarrow{\mu} & \mathcal{P}
 \end{array}$$

les 2-isomorphismes  $\varphi_e$  et  $\varphi_{\text{ass}}$  étant assujettis aux conditions de compatibilité, que nous nous dispenserons d'écrire, assurant que ce sont des 2-morphismes dans la 2-catégorie des ouverts lisses champêtres de  $\mathcal{X}$  (cf. début du paragraphe (A.1.3)).

On dit qu'un tel couple  $(\mathcal{P}, p)$  muni d'une action de  $G$  est un  $G$ -torseur sur  $\mathcal{X}$  si les deux conditions supplémentaires suivantes sont vérifiées :

- (a)  $p$  est surjectif;
- (b) le morphisme naturel

$$G \times_S \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P} \times_{\mathcal{X}} \mathcal{P}$$

induit par le triplet  $(\mu, \text{pr}_2, \varphi_\mu)$  est un isomorphisme.

La discussion précédente permet alors d'affirmer :

**Proposition A.1.10.2 ([24])** Soient  $S$  un schéma,  $G$  un  $S$ -espace algébrique en groupes commutatifs lisse sur  $S$  et  $\mathcal{X}$  un  $S$ -champ algébrique. Alors le groupe  $H^1(\mathcal{X}, G)$  est canoniquement isomorphe au groupe des classes d'isomorphie de  $G$ -torseurs sur  $\mathcal{X}$  (muni de la loi de groupe induite par le produit contracté de toseurs, cf. [24] III 2.4.5).

**Remarque A.1.10.3** Comme d'habitude, un  $G$ -torseur  $p : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{X}$  est trivial si et seulement si le morphisme structural  $p$  a une section.

## A.2 Cohomologie fppf

### A.2.1 Sorites sur la cohomologie plate

Soit  $\mathcal{X}$  un  $S$ -champ algébrique. On définit le gros site  $fppf$  de  $\mathcal{X}$ , noté  $fppf(\mathcal{X})$ , de la manière suivante. Les ouverts sont les couples  $(U, u)$ , où  $U$  est un espace algébrique et  $u : U \rightarrow \mathcal{X}$  est un morphisme localement de présentation finie. Un morphisme entre deux tels ouverts  $(U, u)$  et  $(V, v)$  est un couple  $(\varphi, \alpha)$  où  $\varphi : U \rightarrow V$  est un morphisme d'espaces algébriques et  $\alpha$  est un 2-isomorphisme de  $u$  vers  $v \circ \varphi$ . Une famille couvrante est une collection de morphismes  $((\varphi_i, \alpha_i) : (U_i, u_i) \rightarrow (U, u))_{i \in I}$  telle que le morphisme

$$\coprod_{i \in I} \varphi_i : \coprod_{i \in I} U_i \longrightarrow U$$

soit fidèlement plat et localement de présentation finie.

**Remarque A.2.1.1** Il est évident que l'on aurait obtenu un topos équivalent en ne prenant pour ouverts que les couples  $(U, u)$  où  $U$  est un schéma (appliquer le lemme de comparaison de SGA 4, [3] III 4.1). En particulier si  $\mathcal{X}$  est un schéma on retrouve le topos des faisceaux sur le gros site  $fppf$  usuel (considéré par exemple dans [2], exposé VI, paragraphe 5, p.124).

On définit de manière évidente les faisceaux d'anneaux  $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$  et  $\mathbb{Z}$  sur  $fppf(\mathcal{X})$ . On note  $\mathcal{X}_{\text{pl}}$  le topos des faisceaux sur  $fppf(\mathcal{X})$ . Si  $\mathcal{A}$  est un anneau du topos  $\mathcal{X}_{\text{pl}}$ , on note  $\text{Mod}_{\mathcal{A}}^{\text{pl}}(\mathcal{X})$  la catégorie des faisceaux de modules sur le site annelé  $(fppf(\mathcal{X}), \mathcal{A})$ . Elle sera notée  $\text{Mod}^{\text{pl}}(\mathcal{X})$  lorsque  $\mathcal{A} = \mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ , et  $\text{Ab}^{\text{pl}}(\mathcal{X})$  lorsque  $\mathcal{A} = \mathbb{Z}$ .

On a pour tout  $\mathcal{A}$  un foncteur d'oubli évident

$$\text{Mod}_{\mathcal{A}}^{\text{pl}}(\mathcal{X}) \longrightarrow \text{Ab}^{\text{pl}}(\mathcal{X}).$$

On définit le foncteur « sections globales » en posant pour tout faisceau  $\mathcal{F}$  sur  $fppf(\mathcal{X})$  :

$$\Gamma_{\text{pl}}(\mathcal{X}, \mathcal{F}) = \varprojlim \mathcal{F}(U, u)$$

où la limite projective est prise sur l'ensemble des couples  $(U, u)$  de  $fppf(\mathcal{X})$ . Il est clair que ce foncteur commute aux limites projectives quelconques. En particulier il est exact à gauche. De même que dans le cas des faisceaux lisses-étales, il résulte de SGA 4 ([3] II 6.7) que la catégorie  $\text{Mod}_{\mathcal{A}}^{\text{pl}}(\mathcal{X})$  est une catégorie abélienne avec suffisamment d'objets injectifs. On définit alors  $H_{\text{pl}}^i(\mathcal{X}, \cdot)$  comme étant le  $i^{\text{ième}}$  foncteur dérivé à droite de  $\Gamma_{\text{pl}}(\mathcal{X}, \cdot) : \text{Ab}^{\text{pl}}(\mathcal{X}) \rightarrow \text{Ab}$ . Il coïncide sur  $\text{Mod}_{\mathcal{A}}^{\text{pl}}(\mathcal{X})$  avec le  $i^{\text{ième}}$  foncteur dérivé à droite de  $\Gamma_{\text{pl}}(\mathcal{X}, \cdot) : \text{Mod}_{\mathcal{A}}^{\text{pl}}(\mathcal{X}) \rightarrow (\Gamma_{\text{pl}}(\mathcal{X}, \mathcal{A})\text{-Mod})$  ([4] V 3.5).

FONCTORIALITÉ.

Soit  $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  un 1-morphisme de  $S$ -champs algébriques. On lui associe un couple de foncteurs adjoints  $(f_{\text{pl}}^{-1}, f_{*}^{\text{pl}})$  d'une manière tout à fait analogue à ce qui a été fait au paragraphe (A.1.2) pour les faisceaux lisses-étales. Le foncteur  $f_{*}^{\text{pl}}$  est alors exact à gauche, et on note  $R^i f_{*}^{\text{pl}}$  ses foncteurs dérivés à droite.

**Remarque A.2.1.2** Contrairement à ce qu'il se passe dans le cas des faisceaux lisses-étales, la limite inductive qui définit le foncteur image inverse  $f_{\text{pl}}^{-1}$  est filtrante. Ceci est essentiellement dû au fait qu'un morphisme entre deux objets localement de présentation finie est lui-même localement de présentation finie (ce qui se produisait aussi pour le site étale, mais n'était plus vrai en remplaçant étale par lisse). On en déduit (cf. par exemple [41] annexe A) que le foncteur  $f_{\text{pl}}^{-1}$  est exact, et donc que le couple  $(f_{\text{pl}}^{-1}, f_{*}^{\text{pl}})$  est un morphisme de topos.

Notons ici aussi deux cas particuliers dans lesquels les foncteurs image directe ou image inverse ont une expression plus simple. Lorsque  $f$  est localement de présentation finie, le foncteur  $f_{\text{pl}}^{-1}$  est simplement le foncteur de restriction au site  $fppf$  de  $\mathcal{X}$  via le foncteur  $(U, u) \mapsto (U, f \circ u)$ . Si  $f$  est représentable, le foncteur  $f_{*}^{\text{pl}}$  provient d'une application continue  $fppf(\mathcal{X}) \rightarrow fppf(\mathcal{Y})$ , qui à un ouvert  $fppf u : U \rightarrow \mathcal{Y}$  associe l'ouvert formé de l'espace algébrique  $U \times_{\mathcal{Y}} \mathcal{X}$  muni de la projection sur  $\mathcal{X}$ . Naturellement ceci n'est pas vrai si  $f$  n'est pas représentable, puisqu'alors  $U \times_{\mathcal{Y}} \mathcal{X}$  n'est pas nécessairement un espace algébrique. Ce défaut s'avère gênant dans le calcul des images directes supérieures, et motive l'introduction du site  $fppf$  champêtre ci-dessous.

LE GROS SITE  $fppf$  CHAMPÊTRE D'UN  $S$ -CHAMP ALGÈBRIQUE.



Soit  $\mathcal{X}$  un  $S$ -champ algébrique. On définit le gros site  $fppf$  champêtre de  $\mathcal{X}$  de la manière suivante. Un ouvert de  $\mathcal{X}$  est un couple  $(\mathcal{U}, u)$  où  $\mathcal{U}$  est un  $S$ -champ algébrique et  $u : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{X}$  est un morphisme représentable et localement de présentation finie. Un 1-morphisme de  $(\mathcal{U}, u)$  vers  $(\mathcal{V}, v)$  est un couple  $(\varphi, \alpha)$  où  $\varphi : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$  est un 1-morphisme de  $S$ -champs algébriques et  $\alpha$  est un 2-isomorphisme de  $u$  dans  $v \circ \varphi$ . Si  $(\varphi, \alpha)$  et  $(\psi, \beta)$  sont deux 1-morphismes de  $(\mathcal{U}, u)$  dans  $(\mathcal{V}, v)$ , un 2-morphisme entre  $(\varphi, \alpha)$  et  $(\psi, \beta)$  est un 2-isomorphisme  $\gamma : \varphi \Rightarrow \psi$  tel que  $\beta = (v_* \gamma) \circ \alpha$ .

L'analogue  $fppf$  du lemme (A.1.3.1) est alors valable, de sorte que la 2-catégorie que nous venons de décrire est en fait équivalente à une catégorie, que nous appellerons la catégorie des ouverts  $fppf$  champêtres de  $\mathcal{X}$ . On définit maintenant le gros site  $fppf$  champêtre de  $\mathcal{X}$  de manière évidente, et on le note  $fppfc(\mathcal{X})$ .

**Proposition A.2.1.3** *Le foncteur d'inclusion  $fppf(\mathcal{X}) \rightarrow fppfc(\mathcal{X})$  induit une équivalence de topos de la catégorie des faisceaux sur  $fppfc(\mathcal{X})$  vers la catégorie des faisceaux sur  $fppf(\mathcal{X})$ .*

**Démonstration.** Il suffit encore une fois d'appliquer [3] III 4.1.  $\square$

On voit alors facilement que via cette équivalence de catégories, le foncteur image directe  $f_*^{\text{pl}}$  provient d'une application continue

$$fppfc(\mathcal{X}) \longrightarrow fppfc(\mathcal{Y})$$

qui envoie un ouvert  $u : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{Y}$  de  $\mathcal{Y}$  sur l'ouvert  $\mathcal{X} \times_{\mathcal{Y}} \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{X}$  de  $\mathcal{X}$ . Maintenant les mêmes démonstrations que celles des propositions (A.1.6.1) 1) et (A.1.6.2) permettent d'obtenir le résultat suivant.

**Proposition A.2.1.4** *Soit  $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  un morphisme de  $S$ -champs algébriques.*

- 1) *Soit  $\mathcal{F}$  un faisceau abélien sur  $fppf(\mathcal{X})$ . Alors le faisceau  $R^q f_*^{\text{pl}} \mathcal{F}$  est le faisceau associé au préfaisceau qui à tout ouvert  $fppf u : U \rightarrow \mathcal{Y}$  de  $\mathcal{Y}$  associe  $H_{\text{pl}}^q(\mathcal{X} \times_{\mathcal{Y}} U, \mathcal{F}(\mathcal{X} \times_{\mathcal{Y}} U, \text{pr}_{\mathcal{X}}))$ .*
- 2) *La restriction du foncteur  $R^q f_*^{\text{pl}}$  à la catégorie  $\text{Mod}^{\text{pl}}(\mathcal{X})$  coïncide avec le  $q^{\text{ième}}$  foncteur dérivé à droite du foncteur  $f_*^{\text{pl}} : \text{Mod}(\mathcal{X}) \rightarrow \text{Mod}(\mathcal{Y})$ .  $\square$*

## A.2.2 Comparaison avec la cohomologie lisse-étale

Soit  $\mathcal{X}$  un  $S$ -champ algébrique. On a une application continue évidente :

$$p : fppf(\mathcal{X}) \longrightarrow \text{Lis-ét}(\mathcal{X})$$

induite par le foncteur d'inclusion de  $\text{Lis-ét}(\mathcal{X})$  dans  $fppf(\mathcal{X})$ . En particulier  $p$  induit un couple de foncteurs adjoints :

$$\begin{aligned} p_* : \mathcal{X}_{\text{pl}} &\longrightarrow \mathcal{X}_{\text{lis-ét}} \\ p^{-1} : \mathcal{X}_{\text{lis-ét}} &\longrightarrow \mathcal{X}_{\text{pl}}. \end{aligned}$$

Le foncteur  $p^{-1}$  peut être décrit de la manière suivante. On définit d'abord un adjoint à gauche au foncteur  $p_*$  pour les préfaisceaux, que l'on note  $\widehat{p^{-1}}$ , en associant à tout préfaisceau  $\mathcal{F}$  sur  $\text{Lis-ét}(\mathcal{X})$  le préfaisceau sur  $fppf(\mathcal{X})$  qui à tout ouvert  $fppf u : U \rightarrow \mathcal{X}$  associe

$$(\widehat{p^{-1}} \mathcal{F})(U, u) = \varinjlim \mathcal{F}(V, v)$$

où la limite inductive est prise sur l'ensemble des diagrammes 2-commutatifs :

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\varphi} & V \\ & \searrow \alpha \nearrow & \\ & \mathcal{X} & \end{array}$$

$u \quad v$

avec  $(V, v) \in \text{ob Lis-ét}(\mathcal{X})$ . On définit alors  $p^{-1}$  en posant  $p^{-1} = \widehat{\underline{a}p^{-1}}$  où  $\underline{a}$  est le foncteur « faisceau associé ». Encore une fois, on voit que  $\widehat{p^{-1}}$  est défini par une limite inductive sur  $\text{Lis-ét}(\mathcal{X})$  qui n'est pas filtrante. Le couple  $(p^{-1}, p_*)$  n'est donc pas un morphisme de topos a priori, et il n'y a aucune raison formelle pour que  $p_*$  transforme les objets injectifs de  $\text{Ab}^{\text{pl}}(\mathcal{X})$  en injectifs de  $\text{Ab}(\mathcal{X})$ , ce qui nous oblige à travailler un peu plus pour obtenir la suite spectrale (A.2.2.3) ci-dessous.

**Lemme A.2.2.1** *Si  $\mathcal{F}$  est un objet injectif de  $\text{Ab}^{\text{pl}}(\mathcal{X})$ , alors  $p_*\mathcal{F}$  est un faisceau acyclique pour le foncteur  $\Gamma_{\text{lis-ét}}(\mathcal{X}, \cdot)$ .*

**Démonstration.** Soit  $\mathcal{F}$  un objet injectif de  $\text{Ab}^{\text{pl}}(\mathcal{X})$ . En particulier pour tout ouvert plat champêtre  $(\mathcal{U}, u)$  et pour tout  $q > 0$  on a  $H_{\text{pl}}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}_{(\mathcal{U}, u)}) = 0$ . Remarquons que la proposition (A.1.5.3) ne faisait intervenir que des propriétés générales des faisceaux sur un site, et elle admet un analogue évident pour les faisceaux sur le site  $\text{fppfc}(\mathcal{X})$ . En particulier pour toute famille couvrante  $\mathcal{U}' \rightrightarrows \mathcal{U}$  de  $\text{fppfc}(\mathcal{X})$  et pour tout  $q > 0$ , le groupe  $H^q(\mathcal{U}'/\mathcal{U}, \mathcal{F})$  est nul. Maintenant, toute famille couvrante  $\mathcal{U}' \rightrightarrows \mathcal{U}$  de  $\text{Llc}(\mathcal{X})$  est une famille couvrante de  $\text{fppfc}(\mathcal{X})$ , et on a pour tout  $q > 0$

$$H^q(\mathcal{U}'/\mathcal{U}, p_*\mathcal{F}) = H^q(\mathcal{U}'/\mathcal{U}, \mathcal{F}) = 0.$$

Donc d'après la proposition (A.1.5.3) le faisceau  $p_*\mathcal{F}$  est  $\text{Llc}$ -acyclique. En particulier il est acyclique pour le foncteur  $\Gamma_{\text{lis-ét}}(\mathcal{X}, \cdot)$ .  $\square$

**Lemme A.2.2.2** *Le morphisme naturel*

$$\Gamma_{\text{pl}}(\mathcal{X}, \mathcal{F}) \longrightarrow \Gamma_{\text{lis-ét}}(\mathcal{X}, p_*\mathcal{F})$$

*est un isomorphisme.*

**Démonstration.** C'est complètement évident quand on regarde  $\mathcal{F}$  et  $p_*\mathcal{F}$  comme des faisceaux sur les sites champêtres  $\text{fppfc}(\mathcal{X})$  et  $\text{Llc}(\mathcal{X})$ .  $\square$

On déduit des deux résultats précédents une suite spectrale de Leray, qui résume les relations générales entre cohomologie lisse-étale et cohomologie *fppf*.

**Théorème A.2.2.3** *Soit  $\mathcal{X}$  un  $S$ -champ algébrique, et soit  $\mathcal{F}$  un faisceau abélien sur  $\text{fppf}(\mathcal{X})$ . On a alors une suite spectrale (fonctorielle en  $\mathcal{F}$ ) :*

$$H_{\text{lis-ét}}^p(\mathcal{X}, R^q p_*\mathcal{F}) \Rightarrow H_{\text{pl}}^{p+q}(\mathcal{X}, \mathcal{F}). \quad \square$$

**Remarque A.2.2.4** On en déduit en particulier des morphismes canoniques :

$$H_{\text{lis-ét}}^p(\mathcal{X}, p_*\mathcal{F}) \longrightarrow H_{\text{pl}}^p(\mathcal{X}, \mathcal{F}).$$

De plus ces morphismes sont des isomorphismes si pour tout  $q > 0$ , le faisceau lisse-étale  $R^q p_*\mathcal{F}$  est nul.

Notre objectif à présent est de généraliser aux champs algébriques le résultat de Grothendieck ([2], exposé VI, paragraphe 11) selon lequel si  $G$  est un groupe lisse sur un schéma  $X$ , le morphisme canonique

$$H_{\text{ét}}^q(X, p_*G) \longrightarrow H_{\text{pl}}^q(X, G)$$

est un isomorphisme pour tout  $q$ . Dans la mesure où nous n'utiliserons ce résultat que pour le groupe  $\mathbb{G}_m$ , nous n'avons pas cherché à le démontrer pour les « champs en groupes » lisses sur  $\mathcal{X}$  (notion qui resterait d'ailleurs à définir), mais nous nous sommes contenté de considérer un groupe lisse sur la base  $S$ . Nous allons voir dans les lignes qui suivent que dans ce cadre élémentaire le résultat se déduit assez facilement du cas des schémas.

**Théorème A.2.2.5** *Soient  $S$  un schéma,  $G$  un schéma en groupes lisse sur  $S$ , et  $\mathcal{X}$  un  $S$ -champ algébrique. On note encore  $G$  le faisceau défini sur le site  $\text{fppf}(\mathcal{X})$  par :*

$$\forall (U, u) \in \text{ob fppf}(\mathcal{X}) \quad G(U, u) := G(U, f \circ u) = \text{Hom}_S(U, G).$$

*Alors pour tout  $q$  le morphisme canonique*

$$H_{\text{lisse-ét}}^q(\mathcal{X}, p_*G) \longrightarrow H_{\text{pl}}^q(\mathcal{X}, G)$$

*est un isomorphisme.*

**Démonstration.** Vu la remarque (A.2.2.4), il suffit de montrer que pour tout  $q > 0$ , le faisceau lisse-étale  $R^q p_*G$  est nul. Or par des arguments tout à fait analogues à ceux de (A.1.6.1) on voit que  $R^q p_*G$  est le faisceau lisse-étale associé au préfaisceau qui à tout ouvert  $u : U \rightarrow \mathcal{X}$  associe  $H_{\text{pl}}^q(U, G \times_S U)$  (on notera encore  $H_{\text{pl}}^q(U, G)$  ce dernier groupe). Alors d'après le lemme (A.1.8.2) il suffit de montrer que pour tout morphisme lisse  $u : U \rightarrow \mathcal{X}$  où  $U$  est un schéma et pour tout  $\xi \in H_{\text{pl}}^q(U, G)$  il existe un schéma  $U'$  et un morphisme étale et surjectif  $U' \rightarrow U$  tel que  $\xi|_{U'}$  soit nul. Fixons un tel couple  $(U, u)$ . On note  $p_U$  l'application continue :

$$p_U : \text{fppf}(U) \longrightarrow \text{Ét}(U)$$

induite par le foncteur d'inclusion de  $\text{Ét}(U)$  dans  $\text{fppf}(U)$ . D'après le théorème (11.7) de [2], pour tout  $U'$  sur  $U$  les morphismes canoniques

$$H_{\text{ét}}^q(U', G) \longrightarrow H_{\text{pl}}^q(U', G)$$

sont des isomorphismes. Puis d'après le lemme (11.1) de [2], on en déduit que pour tout  $q > 0$ , le faisceau  $R^q p_{U*}G$  est nul. Or ce dernier n'est autre que le faisceau étale associé au préfaisceau

$$U' \longmapsto H_{\text{pl}}^q(U', G) .$$

En particulier (lemme (A.1.8.2)) pour tout  $\xi \in H_{\text{pl}}^q(U, G)$  il existe une famille couvrante étale  $U' \rightarrow U$  telle que  $\xi|_{U'}$  soit nul.  $\square$

# Bibliographie

- [1] *Schémas en groupes. II : Groupes de type multiplicatif, et structure des schémas en groupes généraux*. Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie 1962/64 (SGA 3). Dirigé par M. Demazure et A. Grothendieck. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 152. Springer-Verlag, Berlin, 1962/1964.
- [2] *Dix exposés sur la cohomologie des schémas*. Advanced Studies in Pure Mathematics, Vol. 3. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1968.
- [3] *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas. Tome 1 : Théorie des topos*. Springer-Verlag, Berlin, 1972. Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1963–1964 (SGA 4), Dirigé par M. Artin, A. Grothendieck, et J. L. Verdier. Avec la collaboration de N. Bourbaki, P. Deligne et B. Saint-Donat, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 269.
- [4] *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas. Tome 2*. Springer-Verlag, Berlin, 1972. Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1963–1964 (SGA 4), Dirigé par M. Artin, A. Grothendieck et J. L. Verdier. Avec la collaboration de N. Bourbaki, P. Deligne et B. Saint-Donat, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 270.
- [5] *Revêtements étales et groupe fondamental (SGA 1)*. Documents Mathématiques (Paris) , 3. Société Mathématique de France, Paris, 2003. Séminaire de géométrie algébrique du Bois Marie 1960–61. Dirigé par A. Grothendieck, augmenté de deux exposés de Mme M. Raynaud. Édition recomposée et annotée du volume 224 des Lectures Notes in Mathematics publiée en 1971 par Springer-Verlag.
- [6] Dan ABRAMOVICH et Angelo VISTOLI : Complete moduli for families over semistable curves. arXiv :math/9811059, 1998.
- [7] Dan ABRAMOVICH et Angelo VISTOLI : Complete moduli for fibered surfaces. *In Recent progress in intersection theory (Bologna, 1997)*, Trends Math., pages 1–31. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2000.
- [8] Dan ABRAMOVICH et Angelo VISTOLI : Compactifying the space of stable maps. *J. Amer. Math. Soc.*, 15(1):27–75 (electronic), 2002.
- [9] Masao AOKI : Deformation theory of algebraic stacks. *Compos. Math.*, 141(1):19–34, 2005.
- [10] Masao AOKI : Erratum : “Hom stacks”. *Manuscripta Math.*, 121(1):135, 2006.
- [11] Masao AOKI : Hom stacks. *Manuscripta Math.*, 119(1):37–56, 2006.
- [12] Michael ARTIN : Algebraization of formal moduli. I. *In Global Analysis (Papers in Honor of K. Kodaira)*, pages 21–71. Univ. Tokyo Press, Tokyo, 1969.
- [13] Michael ARTIN : The implicit function theorem in algebraic geometry. *In Algebraic Geometry (Internat. Colloq., Tata Inst. Fund. Res., Bombay, 1968)*, pages 13–34. Oxford Univ. Press, London, 1969.

- [14] Michael ARTIN : *Théorèmes de représentabilité pour les espaces algébriques*. Les Presses de l'Université de Montréal, Montréal, Que., 1973. En collaboration avec Alexandru Lascu et Jean-François Boutot, Séminaire de Mathématiques Supérieures, No. 44 (Été, 1970).
- [15] Michael ARTIN : Versal deformations and algebraic stacks. *Invent. Math.*, 27:165–189, 1974.
- [16] Charles CADMAN : Using stacks to impose tangency conditions on curves. *Amer. J. Math.*, 129(2):405–427, 2007.
- [17] Henri CARTAN et Samuel EILENBERG : *Homological algebra*. Princeton University Press, Princeton, N. J., 1956.
- [18] Alessandro CHIDO : Stable twisted curves and their  $r$ -spin structures. À paraître dans les Annales de l'Institut Fourier. math.AG/0603687.
- [19] Brian CONRAD : A modern proof of Chevalley's theorem on algebraic groups. *J. Ramanujan Math. Soc.*, 17(1):1–18, 2002.
- [20] Pierre DELIGNE et David MUMFORD : The irreducibility of the space of curves of given genus. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (36):75–109, 1969.
- [21] John W. DUSKIN : Simplicial methods and the interpretation of “triple” cohomology. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 3(issue 2, 163):v+135, 1975.
- [22] Gerd FALTINGS : Finiteness of coherent cohomology for proper fppf stacks. *J. Algebraic Geom.*, 12(2):357–366, 2003.
- [23] Daniel FERRAND : Conducteur, descente et pincement. *Bull. Soc. Math. France*, 131(4):553–585, 2003.
- [24] Jean GIRAUD : *Cohomologie non abélienne*. Springer-Verlag, Berlin, 1971. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 179.
- [25] Roger GODEMENT : *Topologie algébrique et théorie des faisceaux*. Hermann, Paris, 1973. Troisième édition revue et corrigée, Publications de l'Institut de Mathématique de l'Université de Strasbourg, XIII, Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1252.
- [26] Alexander GROTHENDIECK : Sur quelques points d'algèbre homologique. *Tôhoku Math. J. (2)*, 9:119–221, 1957.
- [27] Alexander GROTHENDIECK : Éléments de géométrie algébrique. II. Étude globale élémentaire de quelques classes de morphismes. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (8):222, 1961.
- [28] Alexander GROTHENDIECK : *Fondements de la géométrie algébrique. [Extraits du Séminaire Bourbaki, 1957–1962.]*. Secrétariat mathématique, Paris, 1962.
- [29] Alexander GROTHENDIECK : Éléments de géométrie algébrique. IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas. II. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (24):231, 1965.
- [30] Alexander GROTHENDIECK : Éléments de géométrie algébrique. IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas. III. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (28):255, 1966.
- [31] Alexander GROTHENDIECK : Éléments de géométrie algébrique. IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas IV. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (32):361, 1967.
- [32] Alexander GROTHENDIECK : *Éléments de géométrie algébrique. I. Le langage des schémas*, volume 166 de *Grundlehren Math. Wiss.* Springer-Verlag, 1971.

- [33] Luc ILLUSIE : *Complexe cotangent et déformations. I.* Springer-Verlag, Berlin, 1971. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 239.
- [34] Steven L. KLEIMAN : The Picard scheme. In *Fundamental algebraic geometry*, volume 123 de *Math. Surveys Monogr.*, pages 235–321. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005.
- [35] Donald KNUTSON : *Algebraic spaces.* Springer-Verlag, Berlin, 1971. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 203.
- [36] Serge LANG : *Algebra*, volume 211 de *Graduate Texts in Mathematics.* Springer-Verlag, New York, third édition, 2002.
- [37] Yves LASZLO et Martin OLSSON : The six operations for sheaves on Artin stacks. I. Finite coefficients. *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, (107):109–168, 2008.
- [38] Gérard LAUMON et Laurent MORET-BAILLY : *Champs algébriques*, volume 39 de *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics]*. Springer-Verlag, Berlin, 2000.
- [39] Max LIEBLICH : Remarks on the stack of coherent algebras. *Int. Math. Res. Not.*, pages Art. ID 75273, 12, 2006.
- [40] Max LIEBLICH : Moduli of twisted sheaves. *Duke Math. J.*, 138(1):23–118, 2007.
- [41] James S. MILNE : *Étale cohomology*, volume 33 de *Princeton Mathematical Series.* Princeton University Press, Princeton, N.J., 1980.
- [42] David MUMFORD : Picard groups of moduli problems. In *Arithmetical Algebraic Geometry (Proc. Conf. Purdue Univ., 1963)*, pages 33–81. Harper & Row, New York, 1965.
- [43] David MUMFORD : *Abelian varieties.* Tata Institute of Fundamental Research Studies in Mathematics, No. 5. Published for the Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1970.
- [44] Martin OLSSON : Sheaves on Artin stacks. *J. Reine Angew. Math.*, 603:55–112, 2007.
- [45] Martin C. OLSSON : On proper coverings of Artin stacks. *Adv. Math.*, 198(1):93–106, 2005.
- [46] Martin C. OLSSON : Deformation theory of representable morphisms of algebraic stacks. *Math. Z.*, 253(1):25–62, 2006.
- [47] Martin C. OLSSON : (Log) twisted curves. *Compos. Math.*, 143(2):476–494, 2007.
- [48] Tonny A. SPRINGER : *Linear algebraic groups*, volume 9 de *Progress in Mathematics.* Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, second édition, 1998.